

# **Reduktionsmethoden zur Simulation des aeroelastischen Verhaltens von Wind- kraftanlagen**

Vom Fachbereich für Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig  
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

## **Dissertation**

von

**Marcus Meyer**

aus Bad Oeynhausen.

Tag der Einreichung: 7. Januar 2002

Tag der Prüfung: 4. Juli 2002

Berichter:

Prof. H.G. Matthies, PhD.

Prof. Dr.-Ing. D. Dinkler



## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Reduktionsmethoden zur Simulation der aeroelastischen Wechselwirkungen bei Windkraftanlagen. Es wird dazu ein mathematisches Modell der Anlage aufgestellt: Rotorblätter und Turm werden mittels einer geometrisch nichtlinearen Balkentheorie modelliert, um große Verformungen beschreiben zu können. Dabei werden die Auslenkungen der Rotorblätter in einem rotierenden Koordinatensystem beschrieben, um Starrkörperrotationen und elastische Deformationen voneinander zu trennen. Zur räumlichen Diskretisierung wird die Methode der Finiten Elemente verwendet. Die aerodynamischen Lasten werden durch die Blattelement-Impulstheorie und ein Dynamic Stall Modell in Differentialgleichungsform beschrieben. Zur Verbesserung der Effizienz der Zeitintegration wird die projektionsbasierte Modellreduktion verwendet. Dabei wird die Bewegung der Anlage statt mit den Freiheitsgraden des FE-Modells durch wenige, generalisierte Freiheitsgrade beschrieben. Als Basisvektoren werden die modale Basis, die Lanczos Basis und die Karhunen-Loève Basis verwendet. Zur Abschätzung des durch die Modellreduktion entstandenen Fehlers wird die dual-weighted-residual Methode verwendet. Hieraus wird ein Indikator entwickelt, womit ein auf ein Funktional der Lösung abgestimmter niedrig-dimensionaler Unterraum selektiert werden kann, in dem das gewählte Funktional mit hoher Genauigkeit approximiert wird. Die nichtlineare bzw. postprocessed Galerkin Methode wird zur Verbesserung der Approximationsgenauigkeit abgeleiteter Größen wie Kräften und Momenten verwendet. Die vorgestellten Verfahren werden exemplarisch auf ein Rotorblatt angewendet und die erzielten Ergebnisse bewertet. Abschließend wird die Simulation der Gesamtdynamik der Windkraftanlage unter Verwendung der Modellreduktion auf Substruktur-Ebene dargestellt.

## Abstract

The present work deals with reduction methods for the simulation of the aeroelastic response of wind turbines. First a mathematical model of the turbine is developed: Tower and blades are modeled using a geometrically nonlinear beam theory to account for large deformations. The deformation of the blades is defined in a rotating frame to separate rigid body motions and elastic deformations. For the spatial discretization the finite element method is used. The aerodynamic loads are modeled using the blade-element/momentum theory and a dynamic stall model, which is formulated as a system of differential equations. To improve the efficiency of the time integration, the projection-based model reduction is applied. Using this method the dynamics of the turbine is not described using the degrees of freedom of the finite element model, but with a few generalized coordinates. Here the modal basis, the Lanczos basis and the Karhunen-Loève basis are used. To estimate the error of the reduced model the dual-weighted-residual method is applied. Using this method it is possible to adaptively generate a low-dimensional subspace, which is specially suited for the approximation of a certain functional of the solution with high accuracy. The ideas of the nonlinear and postprocessed Galerkin methods are used to improve the accuracy of derived quantities like inner forces and moments. All methods are applied using the example of a rotor blade and numerical results are compared. Finally the simulation of the dynamics of the wind turbine using model reduction on the substructure level is described.



## **Vorwort**

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen des Graduiertenkollegs „Wechselwirkung von Struktur und Fluid“ der Technischen Universität Braunschweig.

Mein ganz besonderer Dank gilt dem Leiter des Instituts für wissenschaftliches Rechnen, Herrn Prof. H.G. Matthies, PhD., der die Arbeit anregte und auf vielfältige Weise förderte. Für die Übernahme des Koreferats und viele hilfreiche Anmerkungen möchte ich Prof. Dr. D. Dinkler herzlich danken, ebenso Prof. Dr. E. Brommundt für die genaue Durchsicht der Arbeit sowie Prof. Dr. H. Antes für die Übernahme des Vorsitzes.

An die Zeit am Institut für wissenschaftliches Rechnen werde ich stets mit viel Freude zurückdenken. Hier standen die Kollegen J. Steindorf, J. Weimar, A. Keese, C. Heimann und O. Kayser-Herold stets mit Rat und Tat zur Hilfe. Ebenso danke ich meinen Mit-Stipendiaten, allen voran E. Walhorn, T. Droste und A. Neef für die interessanten Diskussionen.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern für die stete Förderung danken und ganz besonders meiner Freundin Stormy, ohne deren Verständnis und Unterstützung diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Marcus Meyer



# Inhaltsverzeichnis

Notation und Symbole	ix
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Überblick über die Modellbildung . . . . .	2
1.2 Existierende Simulationsprogramme . . . . .	7
1.3 Zielsetzung, Lösungsansatz und Gliederung . . . . .	8
<b>2 Modellierung</b>	<b>11</b>
2.1 Geometrisch nichtlineare Balkentheorie . . . . .	11
2.1.1 Kinematik des Balkenelements . . . . .	13
2.1.2 Dehnungsmaß und konstitutive Beziehungen . . . . .	14
2.1.3 Starke Form der Bewegungsgleichungen . . . . .	15
2.1.4 Parametrisierung der Rotationsmatrix . . . . .	15
2.1.5 Schwache Form der Bewegungsgleichungen . . . . .	17
2.2 Externe Lasten und Aerodynamik . . . . .	18
2.2.1 Zweidimensionale Profiltheorie . . . . .	18
2.2.2 Globale Strömung . . . . .	20
<b>3 Diskretisierung</b>	<b>23</b>
3.1 Räumliche Diskretisierung . . . . .	23
3.1.1 Geometrisch nichtlineare Balkenelemente . . . . .	23
3.1.2 Größen im rotierenden Koordinatensystem . . . . .	25
3.1.3 Starrkörper und Versatzlasten . . . . .	27
3.1.4 Externe Lasten . . . . .	28
3.1.5 Globale Strömung . . . . .	29
3.2 Verfahren zur zeitlichen Diskretisierung . . . . .	31
3.2.1 Klassische Verfahren der Strukturdynamik . . . . .	31
3.2.2 Die $cG(q)$ Methode . . . . .	34
3.2.3 Energie-Impuls Verfahren . . . . .	35
3.2.4 Zeitdiskretisierung der Strukturgleichungen . . . . .	39
3.2.5 Zeitdiskretisierung der aerodynamischen Gleichungen . . . . .	40

<b>4</b>	<b>Projektionsbasierte Modellreduktion</b>	<b>43</b>
4.1	Vorgehen der Reduktion . . . . .	44
4.2	Wahl der Basisvektoren . . . . .	45
4.2.1	Modale Basis . . . . .	47
4.2.2	Lanczos Basis . . . . .	48
4.2.3	Karhunen-Loève Basis . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Fehlerschätzung und Adaptivität</b>	<b>55</b>
5.1	Die dual-weighted-residual Methode . . . . .	55
5.2	Approximation eines linearen Modellproblems . . . . .	56
5.3	Anwendung auf allgemeine Variationsprobleme . . . . .	57
5.4	Modellreduktions- und Zeitdiskretisierungsfehler . . . . .	59
5.5	Auswahl geeigneter Basisvektoren . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Verbesserung der Approximationsgüte</b>	<b>65</b>
6.1	Invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	66
6.2	Die zentrale Mannigfaltigkeit . . . . .	68
6.3	Inertiale Mannigfaltigkeiten und nichtlineare Galerkin-Methoden . . . . .	69
6.4	Approximierte inertielle Mannigfaltigkeiten . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>75</b>
7.1	Berechnung des dynamischen Verhaltens eines Rotorblatts . . . . .	77
7.1.1	Anregung des Rotorblatts . . . . .	78
7.1.2	Berechnung der Basisvektoren . . . . .	79
7.1.3	Durchführung und Ergebnisse der Reduktion . . . . .	85
7.1.4	Reduktion der aerodynamischen Variablen . . . . .	89
7.1.5	Anwendung der dual-weighted-residual Methode . . . . .	93
7.1.6	Nichtlineare und postprocessed Galerkin Methode . . . . .	101
7.2	Simulation der Gesamtdynamik . . . . .	106
7.2.1	Kopplung der Substrukturen . . . . .	108
7.2.2	Behandlung der Kopplungsstellen im reduzierten Modell . . . . .	108
7.2.3	Vergleich der Approximationsgüte . . . . .	109
7.3	Analyse der Effizienz . . . . .	114
7.3.1	Setup-Aufwand . . . . .	114
7.3.2	Aufwand der Zeitintegration . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Instationäre Effekte zweidimensionaler Strömung</b>	<b>121</b>
A.1	Modellierung aerodynamischer Beiwerte . . . . .	124
A.2	Beschreibung der stationären Beiwerte . . . . .	125



A.3 Einbeziehung instationärer Effekte . . . . .	128
<b>B Abschätzung der Lebensdauer</b>	<b>135</b>
<b>C Berechnung des Windfeldes</b>	<b>139</b>
<b>D Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>



# Notation und Symbole

Im folgenden wird die in dieser Arbeit verwendete mathematische Notation aufgeführt sowie die Bedeutung der Symbole beschrieben. Allgemein bezeichnen hier lateinische Großbuchstaben in Fettdruck Matrizen und lateinische Kleinbuchstaben sowie griechische Buchstaben in Fettdruck Vektoren. Der Index  $h$  bezeichnet eine ortsdiskrete Größe, der Index  $n$  eine zeitdiskrete Größe und der Index  $m$  weist auf die Approximation durch ein reduziertes Modell der Dimension  $m$  hin.

## Mathematische Notation

$\mathbb{R}^d$	d-dimensionaler euklidischer Raum
$L^2(Q)$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf $Q$
$H^q(Q)$	Sobolev-Raum der $q$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen im Sinne von Distributionen
$C^q(Q)$	Raum der $q$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\delta x$	Kennzeichnung von $x$ als Testfunktion
$(\dot{\cdot})$	Ableitung nach der Zeit
$(\cdot)'$	Ableitung nach einer Ortskoordinate
$\langle x, y \rangle$	inneres Produkt der Größen $x$ und $y$
$\ x\ $	Norm der Größe $x$
$E\{x\}$	Erwartungswert der Größe $x$
$\mathbf{X}^T, \mathbf{x}^T$	Transponierte einer Matrix oder eines Vektors
$\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right _{\mathbf{x}_*}$	Ableitung von $\mathbf{f}$ nach $\mathbf{x}$ am Punkt $\mathbf{x}_*$ , Jakobi-Matrix

## Symbole

$\mathbf{A}$	$d \times d$ Matrix, linearer Anteil eines Gleichungssystems
$\mathbf{a}$	Vektor der Ortsdiskreten Beschleunigungsvariablen
$A$	semilineare Form
$A_Q$	Fläche des Querschnitts eines Balkenelements
$\alpha$	Parameter des HHT- $\alpha$ Verfahrens
$\alpha_f, \alpha_m$	Parameter des generalisierten $\alpha$ Verfahrens
$\mathbf{B}$	Approximation der Kovarianzmatrix
$\mathbf{b}$	rechte Seite eines linearen Gleichungssystems
$B$	Anzahl der Rotorblätter
$\beta$	Parameter des Newmark-Verfahrens
$\mathbf{C}$	Dämpfungsmatrix in der linearen Strukturdynamik
$c$	Sehnenlänge eines Profils
$c_a, c_w, c_m$	aerodynamische Beiwerte für Auftrieb, Widerstand und Moment
$c_n, c_t$	aerodynamische Beiwerte für Normalkraft und Tangentialkraft
$\chi$	Quaternionen
$\mathbf{d}$	Vektor der Knotenvariablen des FE Modells
$d$	Dimension eines Gleichungssystems
$e$	Diskretisierungsfehler
$\mathbf{f}_{in}$	Vektor der Inertialkräfte und -momente
$\mathbf{f}_{el}$	Vektor der inneren Kräfte und -momente
$\mathbf{f}_{ext}$	Vektor der externen Kräfte und -momente
$\mathbf{f}_{aero}$	Vektor der aerodynamischen Kräfte und -momente
$F$	lineare Form
$f_n, f_t, m_{ae}$	lokale aerodynamische Lasten pro Längeneinheit
$f_p$	Frequenz einer periodischen Bewegung
$\mathbf{G}$	Autokovarianzmatrix
$\mathbf{g}$	System von Differentialgleichungen
$G$	Autokovarianzfunktion
$\gamma$	translatorisches Dehnungsmaß
$\gamma$	Parameter des Newmark-Verfahrens
$\mathbf{H}$	Hessenbergmatrix
$\mathbf{h}$	nichtlinearer Anteil eines Systems von Differentialgleichungen
$H$	Impulsantwort bzw. Übertragungsfunktion
$h$	Elementlänge eines Balkenelements
$\boldsymbol{\eta}$	generalisierte Sekundär-Koordinaten
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix passender Dimension
$\mathbf{J}$	Trägheitstensor
$J$	Funktional der Lösung

$\Phi$	inertiale Mannigfaltigkeit
$\Phi_{app}$	approximierte inertiale Mannigfaltigkeit
$\delta\varphi$	Testfunktionen zur Herleitung der schwachen Form
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix in der linearen Strukturdynamik
$\mathbf{k}$	Basisvektoren des Inertialsystems
$K$	approximierte Küssner-Funktion
$k$	reduzierte Frequenz
$\kappa$	rotatorisches Dehnungsmaß
$\mathbf{l}$	Basisvektoren des Querschnitt-Koordinatensystems
$l$	charakteristische Länge
$\lambda$	Variablen des dualen Problems
$\lambda$	Eigenwert
$\mathbf{M}$	Massenmatrix in der linearen Strukturdynamik
$\mathbf{m}_{ext}$	äußere Momente pro Längeneinheit
$\mathbf{m}_q$	innere Momente pro Längeneinheit, materielle Größe
$M$	Anzahl der Schnappschüsse der Methode von Sirovitch
$\mu$	Masse pro Längeneinheit
$\mathbf{N}$	Matrix der Ansatzfunktionen des Balkenelements
$\mathbf{n}_{ext}$	äußere Kräfte pro Längeneinheit
$\mathbf{n}_q$	innere Kräfte pro Längeneinheit, materielle Größe
$N$	Ansatzfunktion
$\nu$	dimensionslose Geschwindigkeit
$\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_m$	konstitutive Matrizen des Balkenelements
$\mathbf{p}$	Definition eines linearen Funktionals
$p$	Parameter des Dynamic Stall Modells
$\mathbf{Q}$	Matrix der Schnappschüsse der Methode von Sirovitch
$\mathbf{q}$	Variablen des Balkenelements
$q$	Variable der Karhunen-Loève Entwicklung
$\theta$	Winkel zwischen Rotorebene und Profelsehne
$\mathbf{R}$	Rotationsmatrix, $\mathbf{R} \in SO(3)$
$\mathbf{r}$	Positionsvektor der Balkenachse
$R$	Rotorradius
$r$	Koordinate der Rotorscheibe, radiale Position
$\rho$	Residuum
$\rho$	Dichte der Luft
$\varrho$	Dichte des Materials eines Balkenelements
$\mathbf{S}_{[A,B,C,D]}$	Matrizen des Dynamic Stall Systems
$\mathbf{s}$	Vektor von Eingangsgrößen des Dynamic Stall Modells
$S$	semi-empirische Stall-Funktion
$s$	Variable im Frequenzbereich

$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix bei großen Rotationen
$T$	Endpunkt der Zeitintegration
$t$	Zeitvariable
$\Delta t$	diskreter Zeitschritt
$\tau$	dimensionslose Zeitvariable des Dynamic Stall Modells
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor der Balkenachse
$\mathbf{u}_a$	Eingangsgrößen des Dynamic Stall Modells
$\mathbf{V}$	Transformationsmatrix der Testfunktionen
$\mathbf{v}$	Vektor der ortsdiskreten Geschwindigkeitsvariablen
$V_\infty$	charakteristische Geschwindigkeit
$v$	axiale induzierte Geschwindigkeit
$\mathbf{w}$	Ortskoordinate in der Referenzkonfiguration
$W$	approximierte Wagner-Funktion
$w$	radiale induzierte Geschwindigkeit
$\Omega$	Winkelgeschwindigkeit, materielle Größe
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit, räumliche Größe
$\mathbf{x}$	Variablen eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung
$x$	Ortskoordinate entlang der Achse des Balkenelements
$\xi$	generalisierte Primär-Koordinaten
$\xi$	generalisierte Variablen
$\mathbf{Y}$	Matrix der Primär-Basisvektoren, säulenweise angeordnet
$\mathbf{y}$	Primär-Basisvektoren
$\mathcal{Y}$	Primär-Ansatzraum der Modellreduktion
$\hat{\mathcal{Y}}$	Bezeichnung des Testraums der Modellreduktion
$\psi$	Rotationsvektor
$\psi$	Rotationswinkel
$\mathbf{Z}$	Matrix der Sekundär-Basisvektoren, säulenweise angeordnet
$\mathbf{z}$	Sekundär-Basisvektoren
$\mathcal{Z}$	Sekundär-Ansatzraum der Modellreduktion

# 1 Einleitung

Die Windkraftanlagen-Industrie hat in den letzten Jahren einen starken Aufschwung erfahren. Die Leistung der installierten Windkraftanlagen nimmt beständig zu, wie in Abbildung 1.1 dargestellt ist. Bei den Anlagen ist dabei der Trend zu immer größeren Rotordurchmessern und Turmhöhen erkennbar, siehe Abbildung 1.2. Der Grund für den Bau immer größerer Anlagen liegt zum einen darin, daß bei den knapper werdenden Standorten an Land die vorhandenen Windressourcen effizienter genutzt werden sollen, zum anderen können so die Installations- und Wartungskosten von zukünftig offshore installierten Anlagen gesenkt werden. Dabei stellt die Konstruktion und Berechnung immer größerer struktureller Komponenten hohe Anforderungen an den Ingenieur. Während bei kleinen Anlagen für die Bemessung die Modellierung des Turms und der Rotorblätter als starre Körper ausreichend war, ist das bei den neuen Anlagen keineswegs mehr der Fall. Der Zwang zur Verwendung von Leichtbauweisen, vor allem bei den Rotorblättern, hat dazu geführt, daß moderne Windkraftanlagen schwingungsanfällige dynamische Systeme sind, welche in Wechselwirkung mit der Windströmung stehen. Die durch die Strömung hervorgerufenen aerodynamischen Lasten verformen die flexiblen Strukturkomponenten, was wiederum zu einer Änderung der Strömung und folglich der aerodynamischen Lasten führen kann. Die Windkraftanlage muß deshalb unter den Gesichtspunkten der Aeroelastik, auch Fluid-Struktur-Wechselwirkung genannt, betrachtet werden.

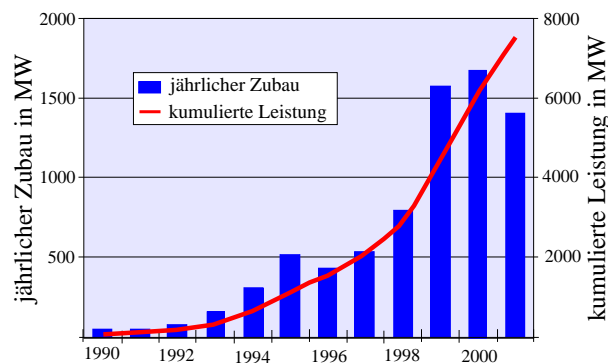


Abbildung 1.1 Zunahme der installierten Leistung von Windkraftanlagen (Quelle: Bundesverband für Windenergie).

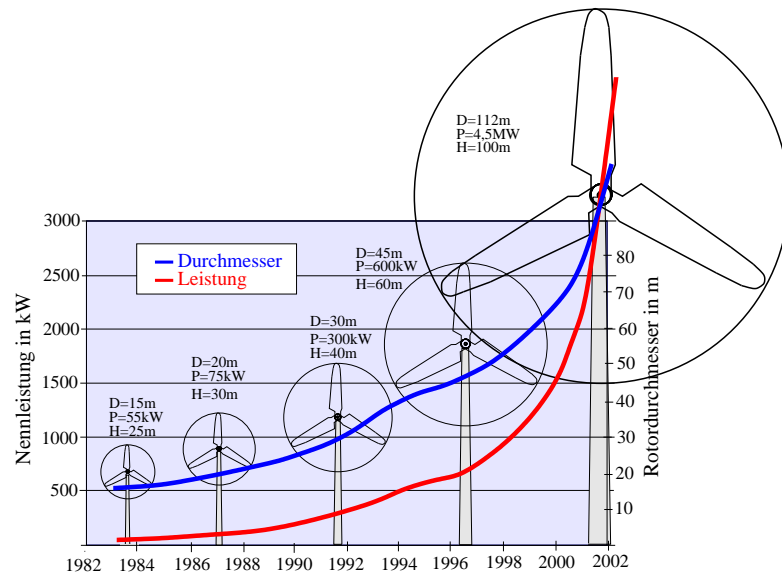


Abbildung 1.2 Entwicklung von Rotordurchmesser und Nennleistung kommerzieller Windkraftanlagen (Quelle: Bundesverband für Windenergie).

## 1.1 Überblick über die Modellbildung

In Abbildung 1.3 ist der in dieser Arbeit gewählte Ansatz zur Modellierung der Windkraftanlage schematisch dargestellt. Die Windkraftanlage kann, wie in der Regelungstechnik üblich, als Blockschaltbild mit mehreren Komponenten dargestellt werden, die miteinander in Wechselwirkung stehen. Die Eingangsgröße der Windkraftanlage ist das turbulente Windfeld. Weiterhin gibt es die strukturellen Komponenten, bestehend aus Turm, Generatorhaus und Rotor. Diese können wiederum aus mehreren Teilen aufgebaut sein, zum Beispiel besteht der Rotor aus Nabe und Rotorblättern. Zusätzlich existiert ein Block, der die Aerodynamik beschreibt. Hier ist die Trennung in zwei Komponenten nicht ganz so offensichtlich: Um die Strömung effizient beschreiben zu können, betrachtet man ein Modell, das die Veränderung der Geschwindigkeit der globalen Strömung in der Rotorebene beschreibt und ein zweites Modell, welches die lokalen Vorgänge an den Rotorblättern beschreibt. Weitere Komponenten der Windkraftanlage sind zum Beispiel Generator, Regelung, Triebstrang sowie Fundament der Windkraftanlage. Auf diese wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht genauer eingegangen.



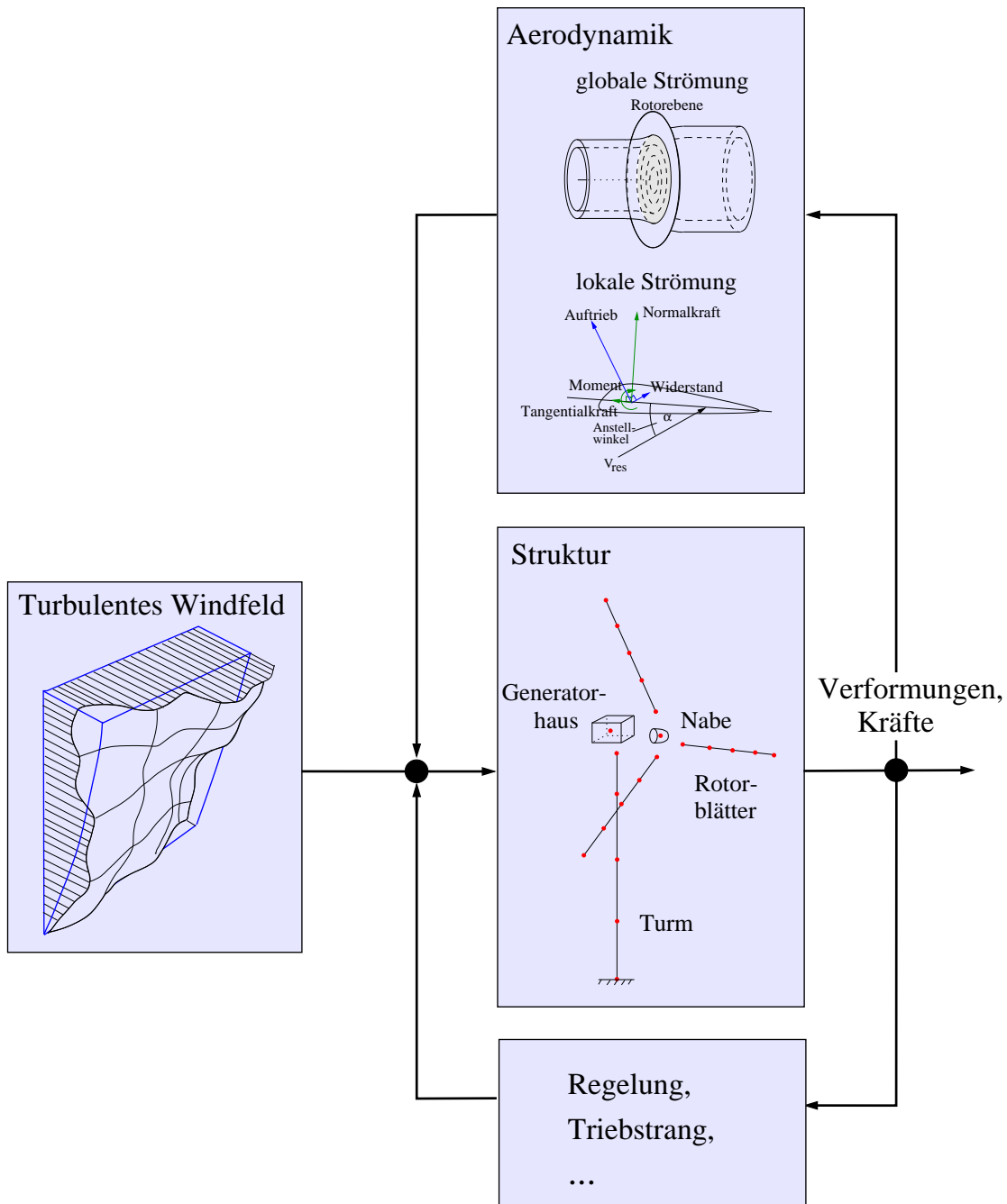


Abbildung 1.3 Identifizierung der Subsysteme.

### Das turbulente Windfeld

Bevor die Simulation der Dynamik der Windkraftanlage erfolgen kann, muß die Eingangsgröße des Systems, das turbulente Windfeld, beschrieben werden. Dabei ist es wichtig, die räumlichen Variationen der Turbulenz zu berücksichtigen. Aufgrund dessen ist die Simulation eines dreidimensionalen Windfelds notwendig. Die Stärke der Turbulenz wird dabei durch die Turbulenzintensität beschrieben, die definiert ist als Standardabweichung der turbulenten Fluktuationen dividiert durch den zeitlichen Mittelwert der Windgeschwindigkeit. Zur Erzeugung des Windfeldes folgt man im allgemeinen dem Ansatz von SHINOZUKA [173]. Es werden Zeitserien der Windgeschwindigkeit an mehreren Punkten einer senkrecht zur mittleren Windgeschwindigkeit stehenden Ebene simuliert und mit der mittleren Windgeschwindigkeit in Windrichtung weiterbewegt, beruhend auf der Annahme der „frozen turbulence“ von TAYLOR [198]. Man benötigt für die Berechnung der Zeitserien neben mittlerer Windgeschwindigkeit als Funktion der Höhe über dem Boden die Beschreibung sowohl der zeitlichen als auch räumlichen Struktur der Änderungen der Windgeschwindigkeit. Eingangsgrößen des Verfahrens sind die spektrale Beschreibung des Windes, gegeben durch die Leistungsspektraldichte, sowie die Kohärenz-Funktion, die die räumliche Korrelation beschreibt. Mittels eines Algorithmus zur inversen schnellen Fouriertransformation werden die diskreten Zeitreihen für die gewählte Anzahl von Punkten auf der Rotorscheibe erzeugt. Arbeitet man in Polarkoordinaten, wird hierdurch ein Zylinder, dessen Achse die Zeitrichtung beschreibt, mit einem Gitter von diskreten Windgeschwindigkeiten gefüllt. Benötigt man während der Simulation der Windkraftanlage die Windgeschwindigkeit an einem bestimmten Punkt in Raum und Zeit, wird mittels der diesen Punkt umgebenden diskreten Gitterpunkt-Werte die turbulente Windgeschwindigkeit durch Interpolation berechnet.

### Die strukturellen Komponenten

Von den strukturellen Komponenten können nur Generatorhaus und Rotornabe in erster Näherung als starre Körper betrachtet werden. Turm und Rotorblätter müssen als elastische Strukturen beschrieben werden. Zur Berücksichtigung der elastischen Deformationen sind verschiedene Vorgehensweisen möglich. Im einfachsten Fall werden Rotorblätter und Turm als Ansammlung von Massenpunkten modelliert, die miteinander durch Federn und Dämpfer verbunden sind. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von modalen Koordinaten. Hier wird die Verformung durch die Superposition von Eigenschwingungsformen der Rotorblätter beziehungsweise des Turmes beschrieben mit zugeordneten Parametern für modale Masse, Steifigkeit und Dämpfung. Während die Modellierung durch miteinander verbundene Massenpunkte auch zur Darstellung großer, also geometrisch nichtlinearer Deformationen geeignet ist, können mit dem modalen Ansatz nur kleine Verformungen beschrieben werden. Die Parameter für modale Masse und

Steifigkeit werden im allgemeinen mit der Methode der Finiten Elemente im voraus bestimmt oder sind das Ergebnis experimenteller Untersuchungen.

Eine alternative Herangehensweise zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Windkraftanlage basiert vollständig auf der Methode der Finiten Elemente. Die Modellierung kann dabei in unterschiedlicher Detailtreue durchgeführt werden: Aufgrund ihrer langen und schlanken Abmessungen können Turm und Rotorblätter als Balken modelliert werden [169]. Der einfachste Ansatz besteht dabei in der Verwendung von Balkenelementen für kleine Verformungen, die für die Rotorblätter in einem rotierenden Koordinaten-System beschrieben werden. Bei neueren Anlagen kann die Annahme kleiner Verformungen jedoch zu restriktiv sein. Aus diesem Grund ist es bei solchen Strukturen sinnvoller, geometrisch nichtlineare Element-Formulierungen zu verwenden. Dies erhöht zwar den Rechenaufwand erheblich, ist aber eine sinnvolle „Investition“, um realistischere Simulationsergebnisse zu erhalten.

Ein genaueres FE-Modell berücksichtigt, zum Beispiel im Fall des Rotorblatts, den inneren Aufbau wie tragende Holme, Verstrebungen und äußere Schichten mittels Schalen- und Balkenelementen. Diese Modelle werden bisher ausschließlich für statische Untersuchungen eingesetzt, da der Aufwand für die zeitliche Simulation sehr groß ist. Zieht man auch hier die Verwendung von nichtlinearen Element-Formulierungen zur Abbildung großer Verformungen in Betracht, erhöht sich der Rechenaufwand nochmals um einige Größenordnungen.

### Die aerodynamischen Lasten

Die Strömung bei Windturbinen ist außerordentlich komplex: Sie ist hochgradig instationär aufgrund von

- Turbulenzen in der bodennahen Erdgrenzschicht,
- dem mit der Höhe veränderlichen zeitlichen Mittelwert der Strömung in dieser Grenzschicht,
- Schräganströmung durch Schwankungen der Windrichtung und nicht zuletzt aufgrund von
- Wechselwirkungen von Strömung und Struktur.

Des weiteren ist die Strömung stark von Viskositätseffekten geprägt: Aufgrund der Leistungsregelung durch aktiv oder passiv hervorgerufenen Strömungsabriß ist der Anstellwinkel-Bereich, in dem sich die Strömung vom Profil abzulösen beginnt, ein wichtiger Bestandteil der operativen Bedingungen von Windkraftanlagen. Auch bei Anlagen, deren Leistungsregelung durch Verringerung des Anstellwinkels durchgeführt wird, kann Strömungsabriß durch Böen in der Anströmung auftreten. Im Blattwurzelbereich, wo

aufgrund der niedrigen Rotationsgeschwindigkeit hohe Anstellwinkel auftreten, liegt ebenfalls meist abgerissene Strömung vor.

Aufgrund der instationären Strömung ist der Anstellwinkel nicht nur eine radial, sondern auch eine zeitlich veränderliche Größe. Liegt die Geschwindigkeit dieser zeitlichen Änderung des Anstellwinkels oberhalb eines kritischen Wertes, zeigen sich ausgeprägt instationäre aerodynamische Effekte, „dynamic stall“ genannt. Sie führen zu einer Hysterese in den aerodynamischen Beiwerten wie auch zu starker Erhöhung der aerodynamischen Lasten im Stall-Bereich. Weiterhin zeigt die Strömung der Windturbine ausgeprägte dreidimensionale Effekte: Die abgehenden Wirbel werden im sich aufweitenden Nachlauf mit der Strömung transportiert und beeinflussen die Anströmung der Rotorblätter. Ein weiterer dreidimensionaler Effekt resultiert aus dem radialen Transport von Luftmaterial im Blattwurzelbereich in Richtung Blattspitze, welches dann aufgrund der Corioliskraft in Richtung Blatthinterkante abgelenkt wird und die Druckverteilung und damit die Lasten beeinflusst.

Zur Berechnung der an den Rotorblättern angreifenden aerodynamischen Lasten findet man verschiedene Vorgehensweisen in der Literatur. Einerseits gibt es kontinuumsbasierte Ansätze, die das gesamte Strömungsfeld betrachten. Das derzeit umfassendste Modell hierfür stellen die Navier-Stokes Gleichungen dar [53]. Da die Reynolds-Zahl der Blattanströmung bei Windturbinen im Bereich von  $5 \cdot 10^6$  liegt, müssen die Navier-Stokes Gleichungen vereinfacht werden zu den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes (RANS) Gleichungen und einem zusätzlichen Turbulenz-Modell. Es gibt Bestrebungen, diese Gleichungen für die dreidimensionale Rotorströmung zu lösen [187]. Solche Berechnungen sind jedoch extrem aufwendig. Weiterhin stimmen die Ergebnisse nur für anliegende Strömung gut mit Meßergebnissen überein, für abgerissene Strömung werden zu hohe Werte für die Leistung der Turbine errechnet [187]. Die Ursache hierfür sind Probleme mit den verwendeten Turbulenzmodellen, die den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung nicht korrekt wiedergeben. Trotz der genannten Probleme besteht in der Lösung der RANS Gleichungen der einzige Weg, die zugrunde liegenden physikalischen Effekte der Aerodynamik von Windturbinen besser verstehen zu lernen und eine Basis zur Weiterentwicklung einfacherer Modelle zur Berechnung der aerodynamischen Lasten zu schaffen. Für Langzeitsimulationen des dynamischen Verhaltens ist dieser Ansatz jedoch nicht geeignet. Da viskose Effekte relevant für die Modellierung der Windturbinen-Strömung sind, können die Euler-Gleichungen sowie die Potentialgleichung nicht zur Modellierung des gesamten Strömungsfeldes verwendet werden.

Eine andere Herangehensweise trennt die Strömung in ein Modell für die lokale Strömung an den Profilschnitten und ein Modell für die globale Strömung auf, den sogenannten Nachlauf. Die aerodynamischen Kräfte an den Profilschnitten werden mit Hilfe der zweidimensionalen Profiltheorie berechnet und dann der globalen Strömung aufgeprägt, wodurch sich wiederum die Anströmung und damit die lokalen Lasten an den Rotorblättern ändern. Auf diesem Ansatz basiert die Blattelement-Impulstheorie, womit Langzeitsimulationen in annehmbarer Rechenzeit durchführbar sind. Die mit diesem Modell erhalte-

nen Simulationsergebnisse stimmen mit Messungen in befriedigendem Maße überein [78], vorausgesetzt, man beachtet die getroffenen Annahmen und Grenzen der Blattelement-Impulstheorie.

## 1.2 Existierende Simulationsprogramme

Es existieren mehrere kommerzielle Programme zur Simulation der Gesamtdynamik von Windkraftanlagen sowie einige Programme im universitären Umfeld. Analysiert man die bei diesen Programmen verwendeten Ansätze zur Modellierung des Systems, so lassen sich nur bei der Modellierung der Struktur Unterschiede erkennen, die Aerodynamik wird bei allen Programmen sehr ähnlich beschrieben. Die Ansätze zur Einbeziehung der Flexibilität von Turm und Rotorblättern lassen sich in folgende vier Gruppen unterteilen:

1. Repräsentation der flexiblen Komponenten durch ihre modalen Eigenschaften, die in einer Vorlauf-Rechnung bestimmt werden. Vertreter dieser Gruppe sind zum Beispiel **Bladed for Windows** [22], **flex5** [84] und **PHATAS** [123].
2. Verwendung von finiten Balkenelementen für kleine Deformationen. Dabei wird der Turm im Inertialsystem und die Rotorblätter in einem rotierenden System beschrieben. Dieser Ansatz ist zum Beispiel im Programm **HawC** [145] des Forschungszentrums Risø implementiert.
3. Approximation der flexiblen Komponenten durch Massenpunkte, die durch Feder- und Dämpferelemente miteinander verbunden sind. Diese Modellierung ist beispielsweise mit dem kommerziellen Mehrkörper-Simulationsprogramm **ADAMS-WT** [49] möglich, das einen speziellen Eingabemodus für Windkraftanlagen besitzt.
4. Verwendung von geometrisch nichtlinearen Balkenelement-Formulierungen zur Beschreibung von großen Verformungen, wobei sowohl Turm als auch Rotorblätter im Inertialsystem beschrieben werden. Als Beispiel sei hier das Programm **DYMORE** [7] genannt, das zur Simulation der Dynamik von Hubschraubern entwickelt worden ist.

Die ersten beiden Modellierungsansätze sind nur für kleine Deformationen in den jeweiligen Koordinatensystemen des Turms und der Rotorblätter gültig. Die Restriktion der kleinen Deformationen tritt bei neueren Anlagen zunehmend an die Grenze ihrer Gültigkeit. So modelliert zum Beispiel SHAWLER [172] die Anlage MS4 von NEG/Micon mit **ADAMS-WT**, um auch große Verformungen untersuchen zu können, und das Forschungszentrum Risø arbeitet an der Erweiterung des **HawC**-Programms zur Einbeziehung großer Verformungen. Mit den Ansätzen (3) und (4) lassen sich auch große Deformationen beschreiben. Dabei ist die Modellierung des Systems mit geometrisch

nichtlinearen Balkenelement-Formulierungen im Inertialsystem zum einen sehr elegant durchführbar. Zum anderen ist sie realitätsnäher und einfacher auf komplexe Strukturen erweiterbar als die Verwendung von durch Federn verbundenen Massenpunkten. Deshalb sollen für das in dieser Arbeit entwickelte Strukturmodell geometrisch nichtlineare Balkenelemente zur Modellierung von Turm und Rotorblättern eingesetzt werden.

Vergleicht man die Modellierung der aerodynamischen Lasten bei den erwähnten Simulationsprogrammen, so sind kaum Unterschiede zu erkennen. In jedem Programm wird die Blattelement-Impulstheorie in Verbindung mit instationären Erweiterungen wie Dynamic-Stall Modellen und dynamischen Nachlauf-Modellen verwendet. Das liegt darin begründet, daß nur auf diese Weise die Gesamtdynamik der Windturbine über lange Zeiträume mit geringem Rechenaufwand simuliert werden kann. Aus diesem Grund findet auch beim in dieser Arbeit entwickelten Modell die Blattelement-Impulstheorie Verwendung. Instationäre Effekte an den Rotorblättern werden durch ein Dynamic-Stall Modell berücksichtigt.

### 1.3 Zielsetzung, Lösungsansatz und Gliederung

Die Zielsetzung der Arbeit liegt in der Untersuchung und Anwendung von Verfahren zur Modellreduktion des aeroelastischen Systems, um effizient Langzeitsimulationen der Gesamtdynamik der Windkraftanlage durchführen zu können. Dazu wird zunächst in **Kapitel 2** ein mathematisches Modell der Struktur und Aerodynamik beschrieben. Das Strukturmodell ist durch Verwendung einer geometrisch nichtlinearen Balkenelement-Formulierung in der Lage, auch große Verformungen darzustellen. Um die Modellreduktion auf Substrukturebene zu erleichtern und die numerische Robustheit des Modells zu verbessern, werden die Deformationen der Rotorblätter in einem rotierenden Koordinatensystem beschrieben. Nach Abschluß der Modellierung liegt ein System von partiellen Differentialgleichungen vor. Das System ist zu kompliziert, um eine analytische Lösung zuzulassen. Deshalb ist eine numerische Approximation der Lösung notwendig. Zu diesem Zweck diskretisiert man die partielle Differentialgleichung zunächst im Raum, zum Beispiel unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente. In Abb. 1.4 ist dieses Vorgehen schematisch dargestellt. Durch die räumliche Diskretisierung erhält man ein oftmals sehr großes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das in einem anschließenden Schritt in der Zeit diskretisiert wird. Die gleichzeitige Diskretisierung in Raum und Zeit ist auch möglich [51, 201], soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. In **Kapitel 3** werden die Modellgleichungen zunächst im Raum mittels Finiten Elemente und dann in der Zeit diskretisiert. Dabei wird detailliert auf die Wahl des Zeitintegrationsalgorithmus für das System der Windkraftanlage eingegangen. Die Lösung des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die aus der räumlichen Diskretisierung resultieren, ist oft so zeitaufwendig, daß sie für den Entwurfsingenieur einer Windkraftanlage von geringem Nutzen ist. Das gilt vor allem für die wichtige Aufgabe im Konstruktionsprozeß,

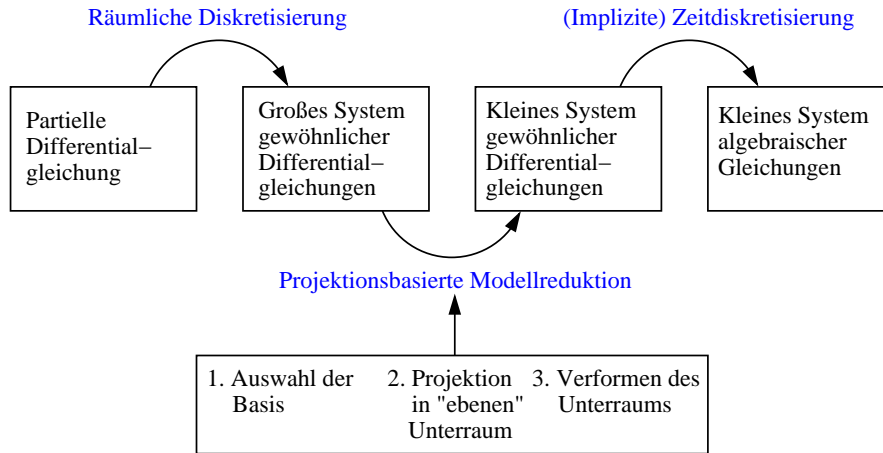


Abbildung 1.4 Numerische Approximation einer partiellen Differentialgleichung.

die Lebensdauer der strukturellen Komponenten abzuschätzen. Dies ist notwendig, da eine Windkraftanlage während ihrer ungefähr 20jährigen Lebensdauer eine ungewöhnlich hohe Zahl von Lastwechseln aushalten muß, die in der Größenordnung von  $10^9$  liegt. Zur Durchführung der Lebensdauer-Abschätzung werden eine Vielzahl von Langzeitsimulationen bei unterschiedlichen Windstärken durchgeführt. Auch für eine Optimierung des dynamischen Verhaltens ist eine große Zahl von Simulationen erforderlich. Demnach kommt der Effizienzsteigerung der Langzeitsimulation eine hohe Bedeutung zu. Während des Lösungsprozesses wird ein Großteil der Rechenzeit für die Berechnung des Zeitverhaltens der vielen für die räumliche Diskretisierung benötigten Freiheitsgrade verwendet. Dies steht in Kontrast zu der Beobachtung, daß die Dynamik sowohl der Strukturkomponenten als auch der Strömung von sehr wenigen, großräumigen Figuren dominiert wird. In der Strukturdynamik können das zum Beispiel die Eigenschwingungsformen sein, in der Fluidodynamik spricht man von kohärenten Strukturen, zum Beispiel den Wirbeln im Nachlauf eines umströmten Körpers. Die Idee zur Effizienzsteigerung der Simulation besteht darin, von den vielen Freiheitsgraden der räumlichen Diskretisierung zu wenigen, durch die großräumigen Figuren definierten Freiheitsgraden zu wechseln. Man denkt sich die Verformung des Systems als die Überlagerung einer Anzahl von Basis-Figuren, sozusagen „Grundbausteine“, deren zeitliche Partizipation an der Gesamtdynamik zu bestimmen ist. Mathematisch gesprochen spannen die Basis-Figuren, auch Basisvektoren genannt, einen niedrig-dimensionalen Unterraum auf. Die Forderung, daß die Dynamik des Systems durch die Überlagerung dieser Basisvektoren approximiert werden soll, entspricht der Projektion des ursprünglichen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen in diesen Unterraum. Deshalb wird das Verfahren auch projektionsbasierte Modellreduktion genannt. Die Systemdynamik wird durch das Verhalten

im Unterraum approximiert und die gewählten Basisvektoren bilden die Koordinatenachsen dieses Unterraums. Bei linearen Problemen der Strukturmechanik wird diese Art der Berechnung, die modale Reduktion genannt wird, häufig verwendet [89]. Die projektionsbasierte Modellreduktion ist jedoch auch auf allgemeine nichtlineare dynamische Systeme anwendbar. In **Kapitel 4** wird das Vorgehen der projektionsbasierten Modellreduktion vorgestellt sowie verschiedene Möglichkeiten der Generierung von Basisvektoren beschrieben. Dabei wird die Berechnung der modalen Basis, der Lanczos-Basis des Krylov Unterraumes und der Karhunen-Loève Basis detailliert dargestellt. Bei der Reduktion stellt sich die Frage, welche Basisvektoren einen guten Unterraum aufspannen in dem Sinne, daß die auf diesen Unterraum reduzierte Dynamik die Dynamik des ursprünglichen Systems möglichst genau wiedergibt. Zudem ist man daran interessiert, möglichst wenige Basisvektoren zu verwenden, um eine hohe Effizienz der Langzeitintegration zu erzielen. Dies geht einher mit dem Wunsch nach Abschätzung des durch die Modellreduktion verursachten Fehlers, da es erstrebenswert ist, für eine gegebene Fehlertoleranz die geringstmögliche Anzahl von Basisvektoren zu verwenden. Dazu wird in **Kapitel 5** die dual-weighted-residual Methode zur Abschätzung des Approximationsfehlers eines Funktional der Lösung einer Variationsgleichung vorgestellt. Daran anschließend wird die Abschätzung des durch Modellreduktion sowie zeitliche Diskretisierung entstandenen Fehlers beschrieben. Des weiteren wird die darauf basierende Herleitung eines Fehlerindikators zur Auswahl eines effizienten niedrig-dimensionalen Unterraums dargestellt. Die Vernachlässigung der kleinräumigen Strukturen führt, wie die Erfahrungen in der linearen Strukturmechanik zeigen, jedoch zu oftmals nicht tolerierbaren Fehlern in der Berechnung der Spannungen bzw. Kräfte und Momente im Bauteil. Zur Verringerung dieser Fehler wird bei linearen Problemen die Methode der statischen Korrektur verwendet. Bei nichtlinearen Problemen bieten die nichtlineare und postprocessed Galerkin Methode die Möglichkeit, durch Einbeziehung der kleinräumigen Strukturen die Approximationsqualität des reduzierten Modells zu erhöhen. Geometrisch gesprochen verformen diese Methoden den linearen, also ebenen Unterraum, in den das System projiziert wird, zu einem „gekrümmten“ Raum, der die exakte Lösung besser approximiert. Diese Methoden werden in **Kapitel 6** nach einer kurzen Einführung der benötigten Begriffe der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme beschrieben. Daran anschließend werden in **Kapitel 7** zunächst alle der in den vorangehenden Kapiteln beschriebenen Methoden beispielhaft an einem Rotorblatt angewendet und ihre Ergebnisse untersucht. Dann erfolgt die Anwendung auf die Berechnung der Gesamtdynamik der Windkraftanlage und eine Untersuchung der Effizienz der Verfahren. Die Arbeit schließt in **Kapitel 8** mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick. In **Anhang A** ist nach einer kurzen Darstellung der instationären Effekte der zweidimensionalen Profilströmung das verwendete Dynamic-Stall Modell ausführlich dargestellt sowie die Formulierung als System von Differentialgleichungen erläutert. In **Anhang B** wird das Vorgehen zur Lebensdauerabschätzung einer Windkraftanlage dargestellt und in **Anhang C** ist das Windfeld der bodennahen Erdgrenzschicht und dessen Berechnung beschrieben.



## 2 Modellierung

Das mathematische Modell der Windkraftanlage kann unterteilt werden in die Modelle für die Struktur sowie die globale und lokale Strömung. Auf die weiteren Komponenten wie Regelung oder Triebstrang soll im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden, da das Hauptaugenmerk auf der Untersuchung von Verfahren zur effizienten Langzeitintegration liegt. Dafür ist die Betrachtung von Struktur und Aerodynamik ausreichend, die Verfahren können auf weitere Komponenten in gleicher Weise angewendet werden.

Die Windkraftanlage wird als flexibles Mehrkörpersystem aufgefaßt, dessen flexible Komponenten der Turm und die Rotorblätter sind. Diese werden im folgenden als Substrukturen bezeichnet und können aufgrund ihrer schlanken Abmessungen als Balken modelliert werden. Das Generatorhaus wie auch die Nabe werden als starre Körper modelliert. Um auch große Verformungen abbilden zu können, wird eine geometrisch nichtlineare Balkentheorie verwendet. Die Bewegungsgleichungen des Starrkörpers werden nicht gesondert hergeleitet, da sie eine Spezialisierung der im folgenden beschriebenen Bewegungsgleichungen des Balkens darstellen. Eine Besonderheit der Windturbine sind die großen Starrkörperrotationen der Rotorblätter, denen geringere elastische Verformungen überlagert sind. Um die Reduktion der Größe des entstehenden Differentialgleichungssystems auf Substruktur-Ebene zu ermöglichen und die numerische Robustheit des Modells zu erhöhen, werden die Bewegungsgleichungen der Rotorblätter in ein rotierendes Koordinatensystem transformiert, was die Beschreibung meist geringer Verformungen durch große Werte der Variablen im Inertialsystem vermeidet. Die lokalen aerodynamischen Lasten werden mit den Gleichungen der zweidimensionalen Profiltheorie beschrieben unter Einbeziehung des im Anhang A beschriebenen Dynamic Stall Modells. Die globale Strömung wird mittels der Impulstheorie modelliert.

### 2.1 Geometrisch nichtlineare Balkentheorie

Balkenelemente können unterschieden werden nach (a) den getroffenen kinematischen Annahmen, (b) der Beschreibung der Gesamtdeformation sowie (c) der Parametrisierung der Rotationen. Hauptsächlich sind bei den kinematischen Annahmen die zwei folgenden Modelle zu finden [17]:

1. **Euler-Bernoulli Balken:** Bei diesem Balkenmodell wird die Annahme getroffen, daß die Ebenen, die in der Referenzkonfiguration senkrecht zur neutralen Faser des Balkens stehen, während der Verformung eben und senkrecht zur neutralen Faser bleiben und ihre Form nicht verändern.
2. **Timoshenko Balken:** Bei diesem Modell trifft man die weniger restriktive Annahme, daß die Ebenen, die in der Referenzkonfiguration senkrecht zur neutralen Faser des Balkens stehen, während der Verformung eben bleiben und ihre Form nicht ändern. Sie bleiben aber nicht notwendigerweise senkrecht zur neutralen Faser stehen. Der Euler-Bernoulli Balken beschreibt also eine Untermenge der Bewegungsmöglichkeiten des Timoshenko Balkens.

Bei der Beschreibung der Deformationen kann man im wesentlichen zwei Methoden erkennen [206]: Die eine führt eine Zerlegung der Gesamtdeformation in Starrkörper-Rotation sowie Verzerrung aus und führt Relativ-Verdrehungen und -Verschiebungen bezüglich des durch die Starrkörperrotation gedrehten Koordinatensystems ein. Diese Herangehensweise, siehe zum Beispiel [39, 40, 87, 141, 155], wird in der englischsprachigen Literatur als „co-rotational method“ bezeichnet. Bei der zweiten Vorgehensweise zur Entwicklung nichtlinearer Balkenelemente wird das Balkenelement aus den partiellen Differentialgleichungen des elastischen Kontinuums hergeleitet. Dabei wird meist die kinematische Annahme verwendet, daß die Balkenquerschnitte während der Verformung eben bleiben. Dieser Ansatz wurde zuerst von REISSNER [159] für eine zweidimensionale Balkentheorie verwendet, auf dem aufbauend dann die richtungsweisenden Arbeiten von SIMO [174, 177, 178] für den Balken im dreidimensionalen Raum folgten. Der mit geometrisch exakter Balkentheorie bezeichnete Ansatz ist sowohl zur Beschreibung von großen Verformungen als auch, bei der Verwendung eines passenden Materialgesetzes, für große Verzerrungen geeignet [74]. Die im weiteren Verlauf entstandenen Elemente, siehe unter anderem [27, 41, 68, 91, 154], unterscheiden sich hauptsächlich in der Behandlung der Rotationsvariablen.

Im folgenden wird die Herleitung dieser geometrisch exakten Balkenmodelle beschrieben. Das vorgestellte geometrisch nichtlineare Balkenmodell geht auf REISSNER [159] und SIMO [174] zurück, die Parametrisierung der Rotationen und Diskretisierung mittels finiter Elemente auf CARDONA und GERADIN [27]. Die gewählte Darstellung orientiert sich an JELENÍČ [96] sowie GERADIN und CARDONA [67], wo eine detaillierte Herleitung des Balkenmodells und Beschreibung der gewählten Implementierung zu finden sind. Zur Vereinfachung wird ein in Ausgangslage gerader und unverdrehter Balken betrachtet. Der Ansatz der geometrisch exakten Balkentheorie ist jedoch ohne weiteres auf im Ausgangszustand verdrehte und gekrümmte Balken anwendbar, wie bei PETROV und GERADIN [148, 149] gezeigt.

### 2.1.1 Kinematik des Balkenelements

Die Linie, die durch die Verbindung der Mittelpunkte der Balkenquerschnitte des undeformierten Balkenelements gegeben ist, sei zur Vereinfachung eine gerade Linie. Dabei ist der Mittelpunkt eines Balkenquerschnitts definiert als Ursprung des Hauptachsensystems des Querschnitts. Die Linie der Mittelpunkte sei weiterhin identisch mit der  $x$ -Achse des Inertialsystems  $(x, y, z)$  mit den Basisvektoren  $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\}$ , siehe Abb. 2.1. Die Referenzposition eines Punktes  $(x, 0, 0)$  auf der Linie der Querschnittsmittelpunkte wird beschrieben durch den Vektor  $\mathbf{r}_0(x) = x\mathbf{k}_1$ . Die Querschnitte des unverformten Balkens in der Ebene  $x = \text{const.}$  stehen senkrecht auf der Linie der Querschnittsmittelpunkte und ihr Normalen-Vektor fällt mit  $\mathbf{k}_1$  zusammen. Die beiden übrigen Basisvektoren  $\mathbf{k}_2$  und  $\mathbf{k}_3$  liegen in den Haupt-Trägheitsachsen des Balkenquerschnitts. Der Querschnitt des Balkenelements ist von beliebiger Form, sei jedoch unveränderlich über die Länge eines Balkenelements.

Im verformten Zustand beschreibt die Linie der Querschnittsmittelpunkte eine Kurve im  $\mathbb{R}^3$ , definiert durch den Positionsvektor  $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{k}_1 + \mathbf{u}(x)$ , siehe Abb. 2.1. Mit der kinematischen Annahme von Bernoulli, daß die Querschnitte nach der Deformation eben bleiben und ihre Form nicht verändern, kann die Position eines beliebigen Punktes auf einem Balkenquerschnitt beschrieben werden durch

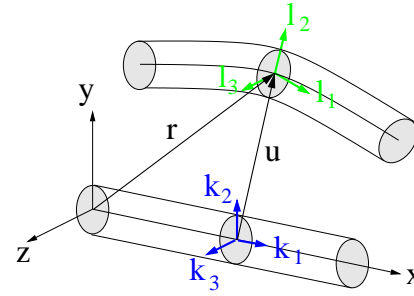


Abbildung 2.1 Kinematik des Balkenelements.

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}(x) + \mathbf{R}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

worin  $y$  und  $z$  die Koordinaten des betrachteten Punktes angeben. Die Matrix  $\mathbf{R}$ , im folgenden Rotationsmatrix genannt, beschreibt die Transformation der Basisvektoren des Inertialsystems  $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\}$  in die Basisvektoren  $\{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\}$  des am Balkenquerschnitt befestigten Koordinatensystems,  $\mathbf{l}_i = \mathbf{R}(x)\mathbf{k}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , im folgenden auch als Querschnitt-Koordinatensystem bezeichnet.  $\mathbf{R}$  ist ein Element der Lie-Gruppe der speziellen orthogonalen Matrizen  $SO(3)$  mit den Eigenschaften  $\det \mathbf{R} = 1$  und  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ . Die verformte Konfiguration des Balkenelements ist also vollständig durch die Angabe der Lage der Querschnitt-Mittelpunkte  $\mathbf{r}(x)$  und der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}(x)$  gegeben. Man erhält ein Cosserat-Modell [19] eines eindimensionalen Kontinuums, die Deformation des Balkens ist vollständig bestimmt durch Angabe der voneinander unabhängigen Verschiebungs- und Verdrehungsfelder.

### 2.1.2 Dehnungsmaß und konstitutive Beziehungen

In REISSNERS Arbeit [159] werden die translatorischen und rotatorischen Dehnungsmaße  $\gamma$  und  $\kappa$  im Querschnitt-Koordinatensystem in Bezug auf die Konfiguration  $(\mathbf{r}, \mathbf{R})$  hergeleitet:

$$\gamma = \mathbf{R}^T \mathbf{r}' - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\kappa} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}'. \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet der Strich die Ableitung nach der axialen Koordinate  $x$ . Mit einer Tilde werden im folgenden schiefssymmetrische 3 Matrizen bezeichnet, gegeben durch den Zusammenhang

$$\tilde{\kappa} \mathbf{r} = \kappa \times \mathbf{r}. \quad (2.3)$$

Die Komponenten von  $\gamma$  haben die folgende physikalische Bedeutung:  $\gamma_1$  ist die Längsdehnung in Richtung  $\mathbf{l}_1$ ;  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  sind Scherdehnungen entlang der Achsen  $\mathbf{l}_2$  und  $\mathbf{l}_3$ . Die Komponenten des korrespondierenden axialen Vektors

$$\kappa = \text{axial}(\tilde{\kappa}) \quad (2.4)$$

können wie folgt interpretiert werden:  $\kappa_1$  beschreibt die Dehnung durch Torsion um  $\mathbf{l}_1$ ;  $\kappa_2$  und  $\kappa_3$  sind die Krümmungen entlang der Achsen  $\mathbf{l}_2$  und  $\mathbf{l}_3$ .

Das verwendete Dehnungsmaß wird bei GERADIN und CARDONA [68] als Positionsgradient bezeichnet. Hier findet sich auch ein Vergleich dieses Dehnungsmaßes mit dem bekannten Greenschen Dehnungsmaß. Es wird gezeigt, daß der Positionsgradient und das Greensche Dehnungsmaß sich nur bei den quadratischen Termen von Dehnungen  $\gamma$  und Krümmungen  $\kappa$  unterscheiden und daß beide Dehnungsmaße zu den gleichen Ausdrücken für Torsions- und Scherdehnungen führen. Die Wahl eines in der Basis  $\{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\}$  definierten Dehnungsmaßes vereinfacht die Beschreibung der konstitutiven Beziehungen. Diese können für ein linear elastisches Material als lineare Beziehungen zwischen Spannungs- und Dehnungsmaßen ausgedrückt werden:

$$\mathbf{n}_q = \mathbf{P}_n \gamma, \quad \mathbf{m}_q = \mathbf{P}_m \kappa. \quad (2.5)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathbf{n}_q$  die resultierenden inneren Kräfte pro Querschnittsfläche im Querschnitt-Koordinatensystem und  $\mathbf{m}_q$  die inneren Momente pro Querschnittsfläche. Der Index  $q$  kennzeichnet die Tatsache, daß diese Größen im am Balkenquerschnitt befestigten Koordinatensystem definiert sind, das auch als materielles Koordinatensystem bezeichnet wird.  $\mathbf{P}_n$  und  $\mathbf{P}_m$  sind die konstitutiven Matrizen, die den Zusammenhang zwischen den translatorischen Dehnungen und den Kräften im Balkenquerschnitt beziehungsweise zwischen den Krümmungen und den Momenten im Balkenquerschnitt angeben. Im Fall eines in Bezug auf die Hauptachsen orthotropen Materials sind diese Matrizen diagonal,

$$\mathbf{P}_n = \text{diag}[EA, GA_2, GA_3], \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P}_m = \text{diag}[GJ_t, EI_2, EI_3], \quad (2.7)$$

hierbei bezeichnet  $EA$  die axiale Steifigkeit,  $GA_2$  und  $GA_3$  die Schubsteifigkeiten,  $GJ_t$  die Torsionssteifigkeit und  $EI_2$  sowie  $EI_3$  die Biegesteifigkeiten.

### 2.1.3 Starke Form der Bewegungsgleichungen

Gemäß Newtons zweitem Gesetz ist die Summe aller auf einen Körper einwirkenden Kräfte und Momente gleich der zeitlichen Änderung des Impulses und Drehimpulses dieses Körpers. Die korrespondierenden Differentialgleichungen der Bewegung eines Balkenelements werden im Anhang A von [174] und in [68] ausgehend von den Bewegungsgleichungen eines Kontinuums und den getroffenen kinematischen Annahmen hergeleitet. Die Bewegungsgleichungen lauten für ein Balkenelement mit  $x \in [0, L]$  und  $t > 0$

$$(\mathbf{R}\mathbf{n}_q)' + \mathbf{n}_{ext} = \mu\ddot{\mathbf{u}}, \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{R}\mathbf{m}_q)' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{R}\mathbf{n}_q) + \mathbf{m}_{ext} = \mathbf{R}(\tilde{\Omega}\mathbf{J}\Omega + \mathbf{J}\dot{\Omega}). \quad (2.9)$$

Hierin bezeichnet  $\tilde{\Omega} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$  die schiefsymmetrische Matrix, die aus dem Vektor der Winkelgeschwindigkeiten  $\Omega$  entsteht. Dabei sind die Komponenten von  $\Omega$  im Querschnitt-Koordinatensystem definiert. Weiterhin bezeichnet  $\mathbf{J}$  den konstanten Trägheitstensor des Balkenquerschnitts sowie  $\mu = \int_{A_Q} \varrho \, dA_Q$  die Masse pro Längeneinheit des Balkenmaterials mit der Materialdichte  $\varrho$  und der Fläche des Querschnitts  $A_Q$ .  $\mathbf{n}_{ext}$  und  $\mathbf{m}_{ext}$  bezeichnen eine externe Kraft bzw. ein Moment pro Längeneinheit. Der Punkt kennzeichnet die Ableitung nach der Zeit  $t$ .

### 2.1.4 Parametrisierung der Rotationsmatrix

Man findet in der Literatur eine Vielzahl von Parametrisierungen der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$ . In der Ingenieurliteratur werden aufgrund ihrer anschaulichen geometrischen Bedeutung häufig Euler- und Kardanwinkel verwendet. Beide Parametrisierungen weisen bei bestimmten Drehungen Singularitäten auf. Diese Singularitäten vermeidet die Parametrisierung durch Euler-Parameter, auch Einheits-Quaternionen genannt: Jede spezielle orthogonale Matrix  $\mathbf{R}$  hat einen reellen Eigenwert mit dem Wert Eins und zugehörigem Eigenvektor  $\mathbf{k}$  sowie zwei konjugiert komplexe Eigenwerte  $e^{-i\psi}$  und  $e^{+i\psi}$ . Eulers Theorem, nach dem sich jede Drehung durch die Drehung um eine feststehende Achse ausdrücken läßt, gibt nun an, daß  $\mathbf{R}$  eine Rotation um die Achse  $\mathbf{k}$ ,  $\|\mathbf{k}\| = 1$ , mit dem Winkel  $\psi$  bewirkt, siehe Abb. 2.2. Der skalare und vektorielle Teil des Quaternionen werden definiert als

$$\chi_0 = \cos(\psi/2), \quad \boldsymbol{\chi} = [\sin(\psi/2)]\mathbf{k}. \quad (2.10)$$

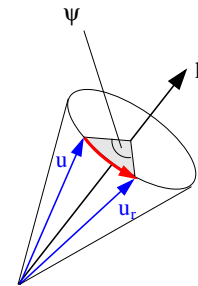


Abbildung 2.2 Drehung des Vektors  $\mathbf{u}$ .

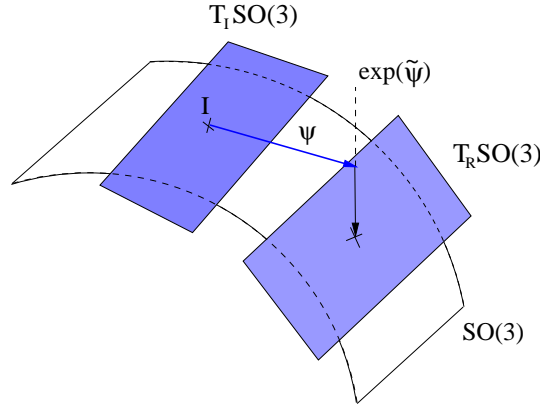


Abbildung 2.3 Tangentialräume des  $SO(3)$ .

Diese vier Parameter müssen die Zwangsbedingung  $\chi_0^2 + \boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi} = 1$  erfüllen.

Eng mit der Darstellung durch Quaternionen verknüpft ist die Parametrisierung durch den Rotationsvektor

$$\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{k}, \quad (2.11)$$

der aufgrund von Eulers Theorem ebenfalls eine geometrisch anschauliche Bedeutung besitzt. Der Vorteil bei der Verwendung des Rotationsvektors besteht darin, daß sich mit  $\boldsymbol{\psi}$  der Rotationsoperator  $\mathbf{R}$  sehr einfach in geschlossener Form berechnen läßt. Aus der Exponentialabbildung

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{1}{2!} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 + \dots = \exp(\tilde{\boldsymbol{\psi}}) \quad (2.12)$$

erhält man nach Anwendung des Cayley-Hamilton Theorems die sogenannte Rodrigues-Formel [12]

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \psi}{\psi} \tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2. \quad (2.13)$$

Geometrisch veranschaulicht liegen die Rotationsvektoren im Vektorraum  $T_I SO(3) = so(3) \cong \mathbb{R}^3$ , dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit  $SO(3)$  an der Identität  $\mathbf{I}$ , siehe Abb. 2.3. Interpolationen, die bei der Approximation mit Finiten Elementen und der Formulierung des Zeitintegrationsalgorithmus' notwendig sind, werden in diesem Vektorraum durchgeführt. Infinitesimale Drehungen und Winkelgeschwindigkeiten liegen jedoch im Tangentialraum an der derzeitigen Konfiguration  $T_R SO(3)$ . Somit benötigt man eine Beziehung zwischen den Größen in diesen beiden Tangentialräumen, im folgenden mit  $\mathbf{T}$  bezeichnet,

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{I} + \left( \frac{\cos \psi - 1}{\psi^2} \right) \tilde{\boldsymbol{\psi}} + \left( 1 - \frac{\sin \psi}{\psi} \right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2}{\psi^2}. \quad (2.14)$$

Die Herleitung dieser Beziehung ist in [67] zu finden. Sie verknüpft Größen im Raum  $T_R SO(3)$  mit Größen im Raum  $T_I SO(3)$ , also zum Beispiel Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  und Zeitableitung des Rotationsvektors  $\boldsymbol{\psi}$ ,

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\psi})\dot{\boldsymbol{\psi}}. \quad (2.15)$$

Weiterhin gilt für  $\boldsymbol{\psi} \rightarrow 0$

$$\lim_{\boldsymbol{\psi} \rightarrow 0} \mathbf{T}(\boldsymbol{\psi}) = \lim_{\boldsymbol{\psi} \rightarrow 0} \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{I}, \quad (2.16)$$

worin  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Da die Parametrisierung des Rotationsoperators drei Parameter verwendet, muß sie irgendwo eine Singularität aufweisen, in diesem Fall tritt sie bei  $\|\boldsymbol{\psi}\| = k \cdot 2\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$  auf. Ist also bei der Implementierung sicher gestellt, daß die Werte von  $\boldsymbol{\psi}$  innerhalb einer Kugel mit Radius  $\pi$  bleiben,

$$\|\boldsymbol{\psi}\| \leq \pi \quad (2.17)$$

können Rotationen jeder Größe beschrieben werden.

### 2.1.5 Schwache Form der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen in starker Form werden nun mit den Testfunktionen  $\delta \mathbf{r}$ , den „virtuellen Verschiebungen“, und  $\delta \boldsymbol{\theta}$ , den „virtuellen Verdrehungen“, multipliziert und über die Elementlänge integriert. Nach partieller Integration, um die Ableitung der Spannungen auf die Testfunktionen  $\delta \mathbf{r}$  bzw.  $\delta \boldsymbol{\theta}$  zu transferieren, ergibt sich unter Berücksichtigung von  $\delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\psi})\delta \boldsymbol{\psi}$  und der Variation der Dehnungen und Krümmungen gemäß [67],

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta \gamma \\ \delta \kappa \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{R}^T \mathbf{r}'} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \widetilde{\kappa \mathbf{T} + \mathbf{T}'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \boldsymbol{\psi}' \\ \delta \mathbf{r} \\ \delta \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix}, \\ &= \mathbf{V} \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\varphi}' \\ \delta \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{R}^T \mathbf{r}'} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \widetilde{\kappa \mathbf{T} + \mathbf{T}'} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \delta \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r} \\ \delta \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

die schwache Form der Bewegungsgleichungen, auch Variationsgleichung genannt,

$$\int_0^L \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\varphi}' \\ \delta \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}^T \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_n \gamma \\ \mathbf{P}_m \kappa \end{pmatrix} + \delta \boldsymbol{\varphi}^T \left( \mathbf{T}^T (\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{T}^T \mathbf{R}^T \mathbf{m}_{ext} \right) dx = 0. \quad (2.20)$$

Eine detailliertere Herleitung der Variationsgleichung ist in [68] zu finden. Setzt man nun die Beziehungen für Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung in Abhängigkeit der gewählten Parametrisierung der Rotationen durch  $\psi$  ein,

$$\Omega = T(\psi)\dot{\psi}, \quad (2.21)$$

$$\dot{\Omega} = T(\psi)\ddot{\psi} + \dot{T}(\psi)\dot{\psi}, \quad (2.22)$$

so erkennt man die Komplexität der Formulierung. Diese resultiert aus der Wahl des Tangentialraums  $T_I SO(3)$  als Referenzraum. Der Vorteil dieser Formulierung liegt darin, daß nach außen, also für die Zeitintegration, sowohl translatorische als auch rotatorische Größen in einem linearen Vektorraum liegen und somit gleich behandelt werden können. Spezielle Update-Verfahren für die rotatorischen Freiheitsgrade wie zum Beispiel bei SIMO und VU-QUOC [177] sind nicht erforderlich.

## 2.2 Externe Lasten und Aerodynamik

Zusätzlich zur Gewichtskraft müssen die aerodynamischen Lasten ermittelt werden, die auf die Rotorblätter wirken. Zur Vereinfachung der Berechnung teilt man die Strömung in einen globalen Anteil, den sogenannten Nachlauf, und einen lokalen Anteil direkt am Rotorblatt auf. Die schwierig zu erfassenden viskosen Effekte wie Grenzschichten und Strömungsablösung treten nur direkt am Rotorblatt, also im lokalen Teil der Strömung auf. In der globalen Strömung sind außer der langsamen Dissipation der am Rotorblatt abgehenden Wirbel keine viskosen Effekte zu berücksichtigen. Diese beiden Strömungsmodelle werden im folgenden genauer beschrieben. Der Einfluß von Turmvorstau oder Turmnachlauf auf die Anströmung der Rotorblätter kann zum Beispiel durch potentialtheoretische bzw. semi-empirische Ansätze berücksichtigt werden. Hierauf soll im folgenden nicht genauer eingegangen werden. Details finden sich zum Beispiel in GASCH [65] oder SPERA [190]. Ist auch die aerodynamische Last auf den Turm von Interesse, so wird diese analog zu den im folgenden beschriebenen zweidimensionalen Lasten auf die Rotorblätter berechnet.

### 2.2.1 Zweidimensionale Profiltheorie

Zur Berechnung der lokalen aerodynamischen Lasten wird meist die Blattelement-Theorie verwendet [65, 190, 81]. Man trifft die Annahme, daß die Strömung an nebeneinander liegenden Profilschnitten des Rotorblatts sich nicht gegenseitig beeinflusst, so daß die Theorie der zweidimensionalen Profilströmung zur Berechnung von Auftrieb, Widerstand und aerodynamischem Moment verwendet werden kann. Bei sich zeitlich ändernden Anströmverhältnissen, hervorgerufen zum Beispiel durch turbulente Anströmung oder Profilschwingungen, treten instationäre Effekte in Erscheinung, die vor allem in dem Anstellwinkelbereich signifikant sind, wo sich die Strömung abzulösen beginnt. Sie



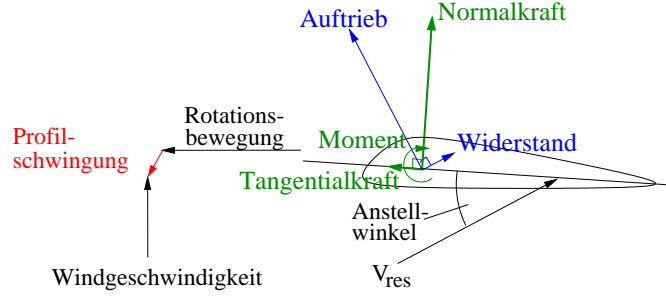


Abbildung 2.4 Aerodynamische Lasten am Profilschnitt.

werden mit dem Begriff „Dynamic Stall“ bezeichnet und sind im Anhang A beschrieben. Es gibt seit einiger Zeit Bestrebungen, die Effekte beim dynamischen Strömungsabriß durch die Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen und einem passenden Turbulenzmodell zu berechnen, siehe zum Beispiel EKATERINARIS und PLATZER [48]. Dies ist jedoch sehr rechenaufwendig und die Ergebnisse sind stark vom verwendeten Turbulenzmodell abhängig [48]. Deshalb finden bei vielen Berechnungen im Helikopter- und Windturbinenbereich semi-empirische Dynamic-Stall Modelle Verwendung, die die instationären Effekte bei Auftrieb, Widerstand und aerodynamischem Moment zu approximieren versuchen. Eine Beschreibung dieser Modelle ist im Anhang A zu finden.

Im folgenden sollen kurz die verwendeten Gleichungen zur Berechnung der aerodynamischen Lasten dargestellt werden: Betrachtet man einen Profilschnitt des Rotorblatts, dargestellt in Abb. 2.4, ergibt sich die effektive Anströmung des Profils durch die Vektoraddition der Anströmung durch den Wind  $v_W$ , der Eigenbewegung  $v_p$  des Profilschnitts, zusammengesetzt aus Starrkörperrotation und Schwingungen, sowie der induzierten Geschwindigkeit  $v_{ind}$ . Hierbei beschreibt die induzierte Geschwindigkeit die im folgenden Abschnitt dargestellte Veränderung der globalen Strömung durch die Einwirkung der Windkraftanlage. Der effektive Anstellwinkel  $\alpha$  bezeichnet den Winkel zwischen resultierender Anströmung

$$v_{res} = v_W + v_{ind} - v_p \quad (2.23)$$

und der Profilsehne. Abhängig von  $v_{res}$  und  $\alpha$  sowie von Profilform, Reynolds- und Mach-Zahl ergeben sich Auftrieb  $f_l$ , Widerstand  $f_w$  und aerodynamisches Moment  $m_{ae}$ . Der Auftrieb wirkt senkrecht zur resultierenden Geschwindigkeit und der Widerstand parallel dazu. Beide greifen der Definition nach am 1/4-Punkt des Profils an. Das Moment ist als positiv definiert, wenn es die Profilnase in Richtung der Windgeschwindigkeit gemäß Abb. 2.4 dreht. Gemäß der zweidimensionalen Profiltheorie werden die Lasten pro Längeneinheit gegeben durch

$$f_l = \frac{\rho_{air}}{2} ||v_{res}||^2 c_l,$$

$$\begin{aligned} f_w &= \frac{\rho_{air}}{2} \|\mathbf{v}_{res}\|^2 c c_w \quad \text{und} \\ m_{ae} &= \frac{\rho_{air}}{2} \|\mathbf{v}_{res}\|^2 c^2 c_m. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hier bezeichnen  $\rho_{air}$  die Dichte der Luft,  $c$  die Länge der Profilsehne sowie  $c_l$ ,  $c_w$  und  $c_m$  den Auftriebs-, Widerstands- und Momentenbeiwert. Zur Einbeziehung der instationären Effekte werden die Beiwerte durch ein zusätzliches dynamisches System modelliert, wodurch sie zusätzlich eine Funktion von Strukturbewegung und -beschleunigung werden. Sämtliche Details hierzu sind im Anhang A zu finden.

### 2.2.2 Globale Strömung

Durch die Einwirkung der Windturbine wird die strömende Luftmasse abgebremst und in Rotation versetzt, was die Anströmverhältnisse an den im vorigen Abschnitt betrachteten Profilschnitten verändert. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Veränderung der Anströmung, induzierte Geschwindigkeit genannt, zu berechnen. Einen Überblick geben zum Beispiel die Artikel von SNEL [184] und CRESPO et al. [38]. Ein Ansatz ist das Aufstellen einer Impuls-Bilanz in axialer Richtung für einen idealen Rotor. Diese Betrachtungsweise geht auf GLAUERT [70] zurück und beschreibt einen quasi-stationären Nachlauf vorgegebener Geometrie. Belastungsänderungen in der Rotorebene führen somit instantan zu einem neuen Strömungszustand und die Trägheit der strömenden Luftmasse wird vernachlässigt.

Es sind einige Versuche unternommen worden, die Modellierung des Nachlaufs zu verbessern. Sogenannte „Dynamic Inflow“ Modelle erweitern die quasi-stationäre Impulstheorie um einen Trägheitsterm auf semi-empirischer Basis, um das dynamische Verhalten der einströmenden Luftmasse zu berücksichtigen. Eine Zusammenstellung der verschiedenen Modelle findet sich bei GAONKAR und PETERS [63] für den Hubschrauber-Bereich und bei SNEL und SCHEPERS [185, 186] sowie SCHEPERS et al. [168] für Windturbinen. Ein detaillierterer Ansatz wird von PETERS et al. [144] verfolgt, der ausgehend von der dreidimensionalen inkompressiblen Potentialtheorie durch die Wahl von einfachen Ansatzfunktionen ein niedrig-dimensionales Modell für die Geschwindigkeiten in der Rotorscheibe entwickelt. Um nicht nur die Dynamik des Nachlaufs, sondern auch seine veränderliche Geometrie zu berücksichtigen, sind „free wake“ Modelle entwickelt worden [207, 117, 23, 24]. Sie beschreiben die hinter dem Rotor entstehende Wirbelstruktur durch Wirbelpartikel oder Wirbelfilamente, die sich gemäß des Biot-Savartschen Gesetzes [78] gegenseitig beeinflussen. Ein weiterer Ansatz löst die dreidimensionalen Euler-Gleichungen, wobei entlang der als Linien idealisierten Rotorblätter die an den Rotorblättern wirkenden Kräfte als Volumenkräfte berücksichtigt werden [133, 189].

Da sich gezeigt hat, daß bei Berücksichtigung der Annahmen und Grenzen der Impulstheorie, siehe zum Beispiel SØRENSEN und MIKKELSEN [188], zufriedenstellende Ergebnisse bei sehr geringer Rechenzeit erzielt werden können, soll der Ansatz der Impulstheorie für das entwickelte Modell Verwendung finden und wird im folgenden kurz

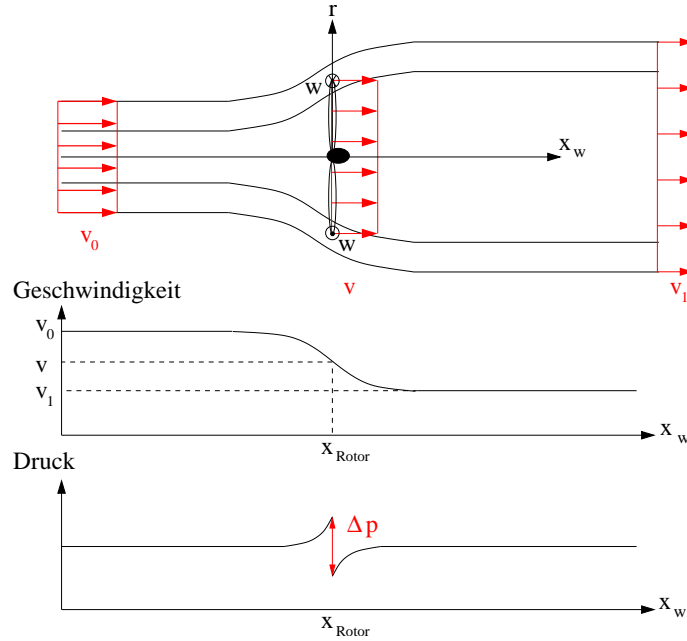


Abbildung 2.5 Stromlinien, Verlauf von Geschwindigkeit und Druck beim idealen Rotor gemäß [78].

beschrieben. Eine genauere Darstellung findet sich in HANSEN [78] und SPERA [190]. Der Rotor wird als durchlässige Scheibe aufgefaßt, die als Widerstand für die Strömung wirkt und die Windgeschwindigkeit von  $v_0$  weit vor dem Rotor auf  $v$  in der Rotorebene und  $v_1$  weit hinter der Rotorebene abbremst. An der Rotorscheibe tritt ein Drucksprung auf, wie in Abb. 2.5 dargestellt. Das Ziel der Berechnung liegt darin, die Geschwindigkeit  $v$  zu ermitteln, da diese die Anströmverhältnisse an den Rotorblättern beeinflusst.

Durch die Annahme einer stationären und reibungslosen inkompressiblen Strömung erhält man nach Anwendung der Bernoulli-Gleichung und der Kontinuitätsgleichung auf die in Abb. 2.5 dargestellte Stromröhre folgenden Zusammenhang zwischen den drei Geschwindigkeiten:

$$v = \frac{1}{2}(v_0 + v_1). \quad (2.25)$$

Die Geschwindigkeit in der Rotorebene ist somit der Mittelwert der Geschwindigkeiten weit vor und hinter dem Rotor. Berücksichtigt man zusätzlich eine tangentielle Geschwindigkeitskomponente im Nachlauf, lauten die Erhaltungsgleichungen für Impuls und Drehimpuls der einströmenden Luftmasse in starker Form für den idealen Rotor

$$2\pi r \rho_{air} v (v_0 - v_1) - f_s = 0 \quad (2.26)$$

$$2\pi r^2 \rho_{air} v w - m_r = 0. \quad (2.27)$$

Hierbei bezeichnet  $f_s$  den Schub pro Längeneinheit des Rotorblatts,  $m_r$  das Drehmoment pro Längeneinheit,  $r$  die radiale Koordinate in der Rotorebene und  $w$  die tangentielle Geschwindigkeitskomponente im Nachlauf, siehe Abb. 2.5. Die gesuchten Größen sind  $v(r)$  und  $w(r)$ . Die Kräfte pro Längeneinheit  $f_s(r)$  und  $m_r(r)$  lassen sich mit den im vorigen Abschnitt beschriebenen Formeln der Kräfte  $f_l(r)$  und  $f_w(r)$  durch Transformation in das Koordinatensystem der Rotorebene ermitteln.

## 3 Diskretisierung

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Modellgleichungen für Struktur und Aerodynamik beschrieben worden sind, müssen diese nun in Raum und Zeit diskretisiert werden. Die räumliche Diskretisierung erfolgt durch Anwendung der Methode der finiten Elemente. Die Berücksichtigung von Versatzkräften und -momenten bei der Verbindung eines Starrkörpers mit einem Balken erfolgt mittels des im Englischen als „master-slave“ oder „parent-child“ bezeichneten Ansatzes [95, 92]. Anschließend werden Verfahren zur zeitlichen Diskretisierung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgestellt und die Wahl des Newmark-Verfahrens für die Windkraftanlage begründet.

### 3.1 Räumliche Diskretisierung

Um die folgenden Ausdrücke zu vereinfachen, wird für jede Komponente der folgenden Vektoren die abstrakte Schreibweise der Funktionalanalysis mit der Notation gemäß [143] verwendet. Für ein Gebiet  $Q \subset \mathbb{R}^d$  sei  $L^2(Q)$  der Lebesgue Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf  $Q$ . Dies ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt und der Norm

$$\langle v, w \rangle_Q = \int_Q v w dx \quad \text{und} \quad ||v||_Q = \left( \int_Q |v|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.1)$$

Analog sei  $L^2(\partial Q)$  der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Rand  $\partial Q$ . Der Sobolev Raum  $H^1(Q)$  besteht aus den Funktionen  $v \in L^2(Q)$ , welche erste Ableitungen im Sinne von Distributionen besitzen. Die Funktionen des Sobolev Raums  $H_0^1(Q)$  sind zusätzlich gleich Null auf dem Rand von  $Q$ . Wenn die Menge  $Q$  der Menge  $\mathcal{O}$  entspricht, auf der die Differentialgleichung definiert ist, dann wird im allgemeinen der Index  $Q$  bei der Notation von Norm und Skalarprodukt weggelassen.

#### 3.1.1 Geometrisch nichtlineare Balkenelemente

Ausgehend von Gleichung (2.20) kann man die semilineare Form  $A(\mathbf{q}; \delta\varphi)$  und die lineare Form  $F(\delta\varphi)$  definieren,

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{q}; \delta\boldsymbol{\varphi}) &= \int_0^L \left[ \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi}' \\ \delta\boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}^T \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_n \boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{P}_m \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \delta\boldsymbol{\varphi}^T \left( \mathbf{T}^T (\mathbf{J} \ddot{\boldsymbol{\Omega}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}) \right) \right] dx, \tag{3.2}
\end{aligned}$$

$$F(\delta\boldsymbol{\varphi}) = \int_0^L \delta\boldsymbol{\varphi}^T \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ext} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{R}^T \mathbf{m}_{ext} \end{pmatrix} dx. \tag{3.3}$$

Im Vektor  $\mathbf{q}$  sind die Variablen  $\mathbf{r}$  und  $\boldsymbol{\psi}$  zusammengefasst,  $\mathbf{q}^T = (\mathbf{r}^T, \boldsymbol{\psi}^T)$ . Die Größen  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{R}$  sind Funktionen von  $\mathbf{q}$ ;  $\mathbf{V}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  sind zusätzlich Funktionen von  $\mathbf{q}'$ .  $\boldsymbol{\Omega}$  ist eine Funktion von  $\mathbf{q}$  sowie  $\dot{\mathbf{q}}$ , und  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$  ist eine Funktion von  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Das Definitionsgebiet besteht aus  $\mathcal{O} \times \mathcal{I}$  mit dem räumlichen Gebiet  $\mathcal{O} = [0, L]$  und dem zeitlichen Gebiet  $\mathcal{I} = [0, T]$ . Zuerst wird die Diskretisierung im Raum durchgeführt: Der natürliche Raum für die Lösungen ist der Sobolev-Raum  $\mathcal{V} = H^1(\mathcal{O})$ , da nur nullte und erste räumliche Ableitungen im inneren Produkt (3.2) auftreten. Damit ist die Lösung  $\mathbf{q} \in \mathcal{V}$  der Variationsgleichung

$$A(\mathbf{q}; \delta\boldsymbol{\varphi}) = F(\delta\boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \delta\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V} \tag{3.4}$$

zu bestimmen. Für einen endlich-dimensionalen Unterraum  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  wird die korrespondierende Galerkin Approximation  $\mathbf{q}_h \in \mathcal{V}_h$  bestimmt als Lösung der Gleichung

$$A(\mathbf{q}_h; \delta\boldsymbol{\varphi}_h) = F(\delta\boldsymbol{\varphi}_h) \quad \forall \delta\boldsymbol{\varphi}_h \in \mathcal{V}_h. \tag{3.5}$$

Der endlich-dimensionale Unterraum

$$\mathcal{V}_h = \{v \in \mathcal{V} : v_K \in P(K), K \in \mathbb{T}_h\} \tag{3.6}$$

ist definiert auf einer Unterteilung  $\mathbb{T}_h$  von  $\mathcal{O}$  in Elemente  $K$  der Länge  $h_k$ . Die globale Elementlänge ist definiert als  $h = \max_{K \in \mathbb{T}_h} h_K$ .  $P(K)$  bezeichnet einen passenden Raum von polynomialen Funktionen auf dem Element  $K \in \mathbb{T}_h$ .

Um nun die Gleichung (3.5) in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Zeit zu transformieren, wählt man eine Knoten-Basis der Form  $\delta\boldsymbol{\varphi}_h^K = \{\delta\varphi_h^i\}_{i=1,\dots,n}$  mit  $n = \dim(\mathcal{V}_h)$  des Raums der finiten Elemente  $\mathcal{V}_h$ .

Im Fall der Balkenelemente hat jeder Knoten sechs Freiheitsgrade und bei Verwendung linearer Ansatzfunktionen für die Deformationen des Elements benötigt man zwei Knoten pro Element. Für ein Element  $K$  der Länge  $h_k$  ergibt sich mit den Formfunktionen

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{h_k} \quad \text{und} \quad N_2(x) = \frac{x}{h_k} \tag{3.7}$$

der Ansatz

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_h^K = \mathbf{N} \delta\boldsymbol{\psi}_k, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{q}_h^K = \mathbf{N} \mathbf{d}_k \tag{3.9}$$

mit der Matrix der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}(s) = \begin{pmatrix} N_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & N_2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & N_2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

und dem Vektor der Knotenwerte  $\mathbf{d}_k = (d_{1,1}, \dots, d_{1,6}, d_{2,1}, \dots, d_{2,6})^T$  für ein Element. Setzt man die Ansätze in Gleichung (3.5) ein und beachtet, daß die Gleichung für beliebige Vektoren  $\delta\psi_k$  gelten muß, ergibt sich nach Assemblierung aller Elemente das folgende System von Differentialgleichungen

$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}, t) = \mathbf{f}_{kin}(\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) + \mathbf{f}_{in}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_{ext}(t) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

mit der Inertialkraft pro Element

$$\mathbf{f}_{kin}^{(e)} = \int_{l_K}^{l_{K+1}} \mathbf{N}^T \left( \mathbf{T}^T (J \ddot{\boldsymbol{\Omega}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} J \boldsymbol{\Omega}) \right) dx, \quad (3.12)$$

wobei  $\boldsymbol{\Omega}$  und  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  gemäß den Gleichungen (2.21) und (2.22) aus den entsprechenden Knotenwerten  $d_{i,j}$  zu bestimmen sind, der inneren Kraft pro Element

$$\mathbf{f}_{in}^{(e)} = \int_{l_K}^{l_{K+1}} \begin{pmatrix} \mathbf{N}' \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}^T \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_n \boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{P}_m \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix} dx \quad (3.13)$$

und dem Vektor der äußeren Lasten pro Element

$$\mathbf{f}_{ext}^{(e)} = \int_{l_K}^{l_{K+1}} \mathbf{N}^T \left( \mathbf{T}^T \mathbf{R}^T \mathbf{m}_{ext} \right) dx. \quad (3.14)$$

Dabei ist  $l_K$  definiert als  $l_K = \sum_{k=2}^K h_{k-1}$ . Die Integrale werden numerisch mittels Gauß-Quadratur ausgewertet. Hierbei wird die Inertialkraft mit 2-Punkt Quadratur integriert, für die innere Kraft wird 1-Punkt Quadratur verwendet, um „shear-locking“ zu vermeiden. Informationen zum Phänomen des „shear-locking“ und über dessen Vermeidung bei den beschriebenen Balkenelementen finden sich bei GERADIN und CARDONA [67].

### 3.1.2 Größen im rotierenden Koordinatensystem

Beschreibt man die Bewegung der Rotorblätter der Windturbine im Inertialsystem, so treten durch die Rotation große Verschiebungen und Verdrehungen auf, die hauptsächlich die Starrkörper-Rotation und meist nur geringe Dehnungen und Krümmungen der Rotorblätter beschreiben. Um die im Abschnitt 3.2.3 geschilderten Probleme bei der Zeitintegration von Systemen mit großen Starrkörper-Rotationen zu vermeiden, ist die Beschreibung der Bewegung der Rotorblätter in einem rotierenden Koordinatensystem vorteilhaft. Ebenso ist die Einführung eines rotierenden Koordinatensystems vorteilhaft für die

Anwendung der Modellreduktion auf Substruktur-Ebene. Um die Bewegungsgleichungen der Rotorblätter in ein Koordinatensystem zu transformieren, dessen Orientierung durch  $\mathbf{R}_R(t)$  und dessen Winkelgeschwindigkeit durch  $\boldsymbol{\omega}_R$  gegeben ist, betrachtet man gemäß ARGYRIS [3] einen Punkt auf der Achse des Balkenelements, dessen Position im Inertialsystem gegeben wird durch

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_R + \mathbf{R}_R[\mathbf{x} + \mathbf{u}]. \quad (3.15)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{r}_R$  die Lage des Ursprungs des rotierenden Systems,  $\mathbf{x}$  die Lage des Punktes in der Referenzkonfiguration und  $\mathbf{u}$  dessen Verschiebung.  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  sind im Koordinatensystem des rotierenden Systems gegeben. Als erste und zweite Zeitableitung erhält man

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{R}}_R[\mathbf{x} + \mathbf{u}] + \mathbf{R}_R\dot{\mathbf{u}}, \quad (3.16)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_p = \ddot{\mathbf{R}}_R[\mathbf{x} + \mathbf{u}] + 2\dot{\mathbf{R}}_R\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_R\ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.17)$$

da  $\mathbf{r}_R$  und  $\mathbf{x}$  zeitlich konstante Größen sind. Verwendet man die Beziehung  $\dot{\mathbf{R}}_R = \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{R}_R = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_R \mathbf{R}_R$  und transformiert die Gleichung durch Multiplikation mit  $\mathbf{R}_R^T$  von links in das rotierende System, folgt die Beschleunigung zu

$$\mathbf{R}_R^T \ddot{\mathbf{r}}_p = \ddot{\mathbf{u}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_r \dot{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_r[\mathbf{x} + \mathbf{u}] + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_r^2[\mathbf{x} + \mathbf{u}] \quad (3.18)$$

mit  $\boldsymbol{\omega}_r = \mathbf{R}_R^T \boldsymbol{\omega}_R$ . Der erste Term auf der rechten Seite stellt die Relativbeschleunigung dar, der zweite wird Coriolisbeschleunigung, der letzte Zentrifugalbeschleunigung genannt. Der dritte Term hat keinen einheitlichen Namen, LANCZOS [116] schlägt die Bezeichnung Eulerbeschleunigung vor. Für die Winkelgeschwindigkeit gilt gemäß KANE [102]

$$\boldsymbol{\omega}_g = \boldsymbol{\omega}_R + \mathbf{R}_R \boldsymbol{\omega}_p, \quad (3.19)$$

worin  $\boldsymbol{\omega}_p$  die Winkelgeschwindigkeit des betrachteten Balkenquerschnitts relativ zum rotierenden System angibt. Die Winkelbeschleunigung im rotierenden System ergibt sich zu

$$\mathbf{R}_R^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_g = \dot{\boldsymbol{\omega}}_r + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_r \mathbf{R}_R \boldsymbol{\omega}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p. \quad (3.20)$$

Zur Transformation der Bewegungsgleichungen der Balkenelemente in ein rotierendes System muß man somit in Gleichung (3.12) folgende Größen ersetzen:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} &\leftarrow \ddot{\mathbf{u}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_r \dot{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_r[\mathbf{x} + \mathbf{u}] + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_r^2[\mathbf{x} + \mathbf{u}], \\ \boldsymbol{\Omega} &\leftarrow \mathbf{R}^T (\boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_p), \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} &\leftarrow \mathbf{R}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}}_r + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_r \mathbf{R}_R \boldsymbol{\omega}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die konjugierten Größen  $\mathbf{n}_{ext}$  und  $\mathbf{m}_{ext}$  in Gleichung (3.14) müssen ebenfalls in das rotierende System transformiert werden.



### 3.1.3 Starrkörper und Versatzlasten

Wie in der Einleitung des Kapitels erwähnt, gehen die Bewegungsgleichungen eines Starrkörpers aus den Bewegungsgleichungen des Balkenelements hervor, da jeder infinitesimal dünne Querschnitt des Balkenelements aufgrund der Annahme der Unverformbarkeit der Querschnitte als Starrkörper betrachtet wird. Liegt der Ursprung des Referenzsystems im Ausgangszustand im Massenmittelpunkt des Starrkörpers, kann die Konfiguration des Starrkörpers wie folgt durch Verschiebung  $\mathbf{u}_s(t)$  seines Massenmittelpunktes und Lage seiner Hauptachsen  $\mathbf{R}_s(t)$  beschrieben werden. Die starke Form der Bewegungsgleichungen für einen Starrkörper mit der Masse  $m_s$  und dem Trägheitstensor  $\mathbf{J}_s$ , der im mitbewegten Koordinatensystem definiert sei, folgt gemäß den Gleichungen (2.8) und (2.9) zu

$$m_s \ddot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{n}_{ext}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{R}_s \left( \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_s \mathbf{J}_s \boldsymbol{\Omega}_s + \mathbf{J}_s \dot{\boldsymbol{\Omega}}_s \right) = \mathbf{m}_{ext}. \quad (3.23)$$

Hierbei steht  $\boldsymbol{\Omega}_s$  für die Winkelgeschwindigkeit des Starrkörpers, definiert im mitbewegten Koordinatensystem der Orientierung  $\mathbf{R}_s$ .

Modelliert man das Generatorhaus als Starrkörper und den Turm mittels der beschriebenen Balkenelemente, so treten an der Verbindung von Starrkörper und Balkenelement Versatzkräfte und -momente auf. Diese können durch die im Englischen mit „master-slave“ oder „parent-child“ bezeichnete Methode berücksichtigt werden, die ausführlich zum Beispiel bei JELENIĆ [95] oder IBRAHIMBEGOVIĆ [92] beschrieben ist. Bei einer starren Verbindung werden die Verschiebungen und Verdrehungen des Anschlußpunktes  $j$  des Balkenelements durch die Verschiebung und Verdrehung des Starrkörpers vorgegeben, der Knoten  $j$  des Balkenelements wird zum „Sklaven“ des Starrkörpers. Dies führt zu folgender Zwangsbedingung,

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_s + \mathbf{R}_s \mathbf{r}_{0sj} - \mathbf{r}_{0sj}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_s. \quad (3.25)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{u}_j$  die Verschiebung des Knotens  $j$  des Balkenelements, der mit dem Starrkörper verbunden ist.  $\mathbf{u}_s$  beschreibt die Verschiebung des Starrkörpers,  $\mathbf{R}_s$  die Orientierung des Starrkörpers und  $\mathbf{r}_{0sj}$  den Verbindungsvektor vom Massenmittelpunkt des Starrkörpers zum Knoten  $j$  des Balkenelements. Verwendet man die nichtlinearen Beziehungen (3.24, 3.25) zwischen den Variablen des Starrkörpers und des Balkenknotens  $j$  sowie deren erste und zweite Zeitableitung bei der Elementformulierung des mit dem Starrkörper verbundenen Balkenelements, werden sämtliche Versatzkräfte und -momente berücksichtigt.

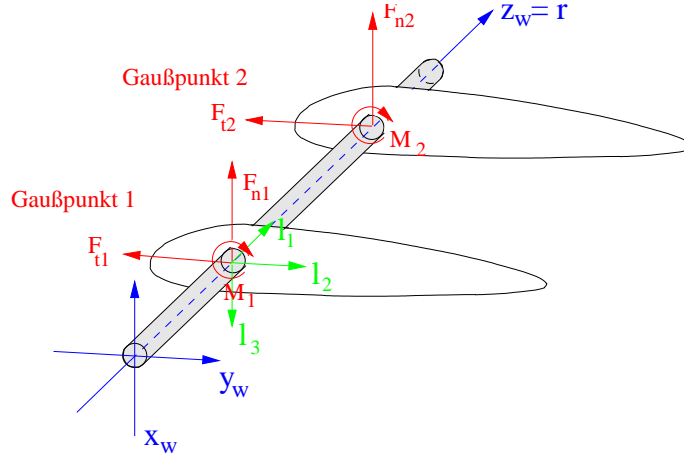


Abbildung 3.1 Am Balkenelement befestigte Profilschnitte.

### 3.1.4 Externe Lasten

Zusätzlich zur Gewichtskraft  $\mathbf{f}_g$ , die für ein Element gegeben wird durch

$$\mathbf{f}_g^{(e)} = \int_{l_K}^{l_{K+1}} \mathbf{N}^T \mu \mathbf{g} dx \quad (3.26)$$

mit  $\mathbf{g} = (0, 0, -9.81 \text{ m/s}^2, 0, 0, 0)^T$ , wirken am Rotorblatt die aerodynamischen Lasten  $\mathbf{f}_l$ ,

$$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_l. \quad (3.27)$$

Wie in Abb. 3.1 dargestellt, denkt man sich an jedem Gaußpunkt des betrachteten Balkenelements ein fest mit dem Balken verbundenes starres Profil. An diesem Profil herrsche zweidimensionale Strömung. Die aerodynamischen Lasten pro Längeneinheit werden durch die in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Formeln gegeben. Da das im Anhang beschriebene aerodynamische Modell jedoch zur Beschreibung der aerodynamischen Lasten nicht Auftrieb und Widerstand, sondern Normal- und Tangentialkraft verwendet, werden statt der Beiwerte  $c_l$  und  $c_w$  die Beiwerte  $c_n$  und  $c_t$  definiert,

$$c_n = c_a \cos \alpha + c_w \sin \alpha, \quad (3.28)$$

$$c_t = c_a \sin \alpha - c_w \cos \alpha, \quad (3.29)$$

die durch Rotation um  $\alpha$  aus  $c_a$  und  $c_w$  hervorgehen. Die hiermit bestimmten aerodynamischen Lasten

$$f_n = \frac{\rho_{air}}{2} \|\mathbf{v}_{res}\|^2 c_n,$$

$$\begin{aligned} f_t &= \frac{\rho_{air}}{2} \|\mathbf{v}_{res}\|^2 c_t \quad \text{und} \\ m_{ae} &= \frac{\rho_{air}}{2} \|\mathbf{v}_{res}\|^2 c^2 c_m \end{aligned} \quad (3.30)$$

wirken längs der Achsen des Querschnittskoordinatensystems  $\{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\}$ , wie in Abb. 3.1 dargestellt. Stimmt dieses Koordinatensystem nicht mit dem Hauptachsensystem des Querschnitts überein, muß eine Parallelverschiebung der Kräfte in den Ursprung des Hauptachsensystems des Profilquerschnitts durchgeführt werden, siehe zum Beispiel SCHNELL et al. [170]. Des weiteren müssen die Kräfte in Komponenten dieses Hauptachsensystems angegeben werden. Zur Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung der Rotorblätter in radialer Richtung, also des Effektes der Blattspitzenwirbel auf die relative Anströmung, kann der Prandtlsche Blattspitzenfaktor  $p_b$  zur Korrektur verwendet werden [190]. Er ist definiert als

$$p_b = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \exp \left\{ -\frac{B(R-r)}{2r \sin \theta} \right\} \right), \quad (3.31)$$

worin  $B$  die Anzahl der Rotorblätter angibt und  $\theta$  den Winkel zwischen relativer Anströmgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{res}$  und der Rotorebene. Man erhält die materiellen Größen  $\mathbf{n}_{ae} = (0, -p_b f_t, -p_b f_n)^T$  und  $\mathbf{m}_{ae} = (p_b m_{ae}, 0, 0)^T$ , damit folgt der aerodynamische Lastvektor pro Element  $K$  zu

$$\mathbf{f}_l^{(e)} = \int_{l_K}^{l_{K+1}} \mathbf{N}^T \left( \begin{matrix} \mathbf{R} \mathbf{n}_{ae} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{R}^T \mathbf{m}_{ae} \end{matrix} \right) dx. \quad (3.32)$$

Dabei ist  $\mathbf{v}_{res}$  eine Funktion von  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  und der Zeit  $t$ . Aufgrund des Dynamic-Stall Modells sind die Beiwerte  $c_n$ ,  $c_t$  und  $c_m$  Funktionen von  $t$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\ddot{\mathbf{d}}$ . Das Integral über die Elementlänge wird mittels Gauß-Quadratur ausgewertet. Man erhält einen von den Verschiebungen und Verdrehungen, den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowie der Zeit abhängigen aerodynamischen Lastvektor

$$\mathbf{f}_l = \mathbf{f}_l(\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}, t). \quad (3.33)$$

### 3.1.5 Globale Strömung

Die Stromröhre, die bei der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen eindimensionalen Impulstheorie eingeführt wurde, wird in  $N_R$  Ringelemente unterteilt, wie in Abb. 3.2 dargestellt. Die laterale Begrenzung dieser Ringelemente wird durch Stromlinien gebildet, es gibt keine Strömung über die Elementgrenzen. Weiterhin wird die Annahme getroffen, daß die Kraft der Rotorblätter auf die Strömung konstant über das Ringelement verteilt ist. Das entspricht einem Rotor mit unendlicher Anzahl von Rotorblättern. Die Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls, siehe Abschnitt 2.2.2, ergeben zusammen mit Gleichung (2.25) das folgende Gleichungssystem für die Unbekannten  $\mathbf{v}_{ind} = (v, w)^T$ ,

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{v}_{ind}) = \begin{pmatrix} 4\pi r \rho_{air} v (v_0 - v) - f_s \\ 2\pi r^2 \rho_{air} v w - m_r \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

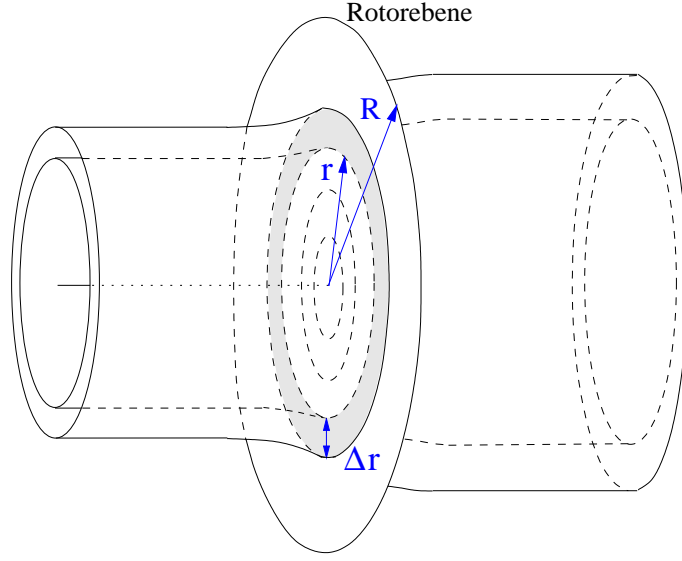


Abbildung 3.2 Diskretisierung der Stromröhre in Ringelemente

Um auch einen turbulenten Nachlaufzustand bei starker Abbremsung der einströmenden Luftmasse richtig beschreiben zu können, wird für  $v < 0.7v_0$  die von GLAUERT entwickelte empirische Korrektur von  $v$  durchgeführt [78]. Mit der Definition des axialen Induktions-Faktors  $a$  durch

$$v = (1 - a)v_0 \quad (3.35)$$

und dem empirisch bestimmten Glauert-Faktor

$$p_g = \begin{cases} 1 - a & a \leq 1/3, \\ (1 - \frac{1}{4}(5 - 3a)a) & a > 1/3, \end{cases} \quad (3.36)$$

erhält man die endgültigen Bestimmungsgleichungen für  $\mathbf{v}_{ind}$  zu

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{v}_{ind}) = \begin{pmatrix} 4\pi r \rho_{air} v_0^2 a p_g - f_s \\ 2\pi r^2 \rho_{air} v_0 (1 - a) w - m_r \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

worin die Unbekannten nun  $a$  und  $w$  sind. Das Definitionsgebiet dieser Variablen ist  $r \in [0, R]$ . Die beiden Größen  $f_s$  und  $m_r$  werden mittels der im vorigen Abschnitt beschriebenen zweidimensionalen Profiltheorie für jedes Rotorblatt berechnet. Für den betrachteten Gaußpunkt mit der Position  $r_G$  ist die Summe

$$f_s = \sum_{i=1}^B f_{n,i}, \quad m_r = \sum_{i=1}^B r_{G,i} \cdot f_{t,i} \quad (3.38)$$

zu bestimmen mit der aerodynamischen Normalkraft  $f_n$  pro Längeneinheit und der aerodynamischen Tangentialkraft  $f_t$  pro Längeneinheit. Die Diskretisierung erfolgt durch Kollokation am Mittelpunkt eines jeden Ringelements. Das entstehende nichtlineare Gleichungssystem für die diskreten Variablen  $a_j$  und  $w_j$  für das Element  $j$  wird durch Fixpunkt-Iteration [104] gelöst.

## 3.2 Verfahren zur zeitlichen Diskretisierung

Für die Zeitintegration eines Systems von nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen sind in der Literatur eine Vielzahl von Verfahren zu finden. Die Wahl des verwendeten Verfahrens hängt vom untersuchten Problem ab. So sind zum Beispiel in der Starrkörperdynamik die Runge-Kutta Verfahren sehr beliebt, da sie robust, einfach zu verwenden und ausreichend schnell sind. Für Probleme der Strukturdynamik sind sie jedoch oft zu aufwendig. Aufgrund dessen wurden für Berechnungen in der Strukturdynamik andere Verfahren entwickelt, die direkt auf das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung anwendbar sind.

Der folgende Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über drei häufig in der Strukturdynamik verwendete Integrationsmethoden, das Newmark-, HHT- $\alpha$  und das generalisierte  $\alpha$ -Verfahren. Die Darstellung orientiert sich dabei an HUGHES [88]. Weiterhin wird das  $cG(q)$ -Verfahren zur Zeitintegration beschrieben [51]. Man kann zeigen, daß das  $cG(1)$ -Verfahren unter bestimmten Bedingungen mit dem Newmark-Verfahren für  $\gamma = 1/2$  und  $\beta = 1/4$  übereinstimmt, und somit die Zeitintegration mittels des Newmark-Verfahrens in Variationsschreibweise dargestellt werden kann. Dies ist notwendig für die in Kapitel 5 durchgeführte Fehleranalyse. Daran anschließend werden kurz Verfahren zur algorithmischen Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls diskutiert, um die Wahl des Newmark-Verfahrens für das System der Windturbine zu begründen.

### 3.2.1 Klassische Verfahren der Strukturdynamik

#### Newmark-Verfahren

Die bei linearen Problemen der Strukturdynamik am weitesten verbreitete Zeitintegrations-Methode ist die Familie der Newmark-Verfahren [136], welche aus den folgenden drei Gleichungen besteht:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_{ext}(t_{n+1}), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_{n+1} + 2\beta\mathbf{a}_n], \quad (3.40)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}]. \quad (3.41)$$

Hierbei stellen  $\mathbf{d}_{n+1}$ ,  $\mathbf{v}_{n+1}$  und  $\mathbf{a}_{n+1}$  die Approximationen von  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\ddot{\mathbf{d}}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  dar.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{K}$  sind die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix

des betrachteten Systems. Die Werte  $\mathbf{d}_n$ ,  $\mathbf{v}_n$  und  $\mathbf{a}_n$  des vorigen Zeitschritts werden als bekannt vorausgesetzt. Die Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  bestimmen die Stabilität und Genauigkeit des Verfahrens. Nur für die Wahl von  $\gamma = 1/2$  sind die Newmark-Methoden von zweiter Ordnung genau. Für die Parameterwahl von  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$ , Trapezregel oder „average acceleration method“ genannt, ist das Newmark-Verfahren implizit und für lineare Probleme unbedingt stabil, unabhängig von der Größe des Zeitschritts [88]. Weiterhin kann man zeigen, daß die Trapezregel bei linearen Systemen die Gesamtenergie des Systems exakt erhält. Die Variante mit  $\beta = 0$  und  $\gamma = 1/2$ , Zentrale-Differenzen Methode genannt, ist explizit, wenn Massen- und Dämpfungsmatrix diagonal sind. Sie ist nur bedingt stabil mit der Begrenzung des Zeitschritts durch

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega_{max}}. \quad (3.42)$$

Hierbei bezeichnet  $\omega_{max}$  die größte im System auftauchende Frequenz. Wenn die Zeitschrittbegrenzung nicht zu stark ist, dann ist die Zentrale-Differenzen Methode eine sehr ökonomische direkte Integrationsroutine [88]. Für ein typisches Balkenelement mit zwei Knoten lautet für die Methode der zentralen Differenzen der Ausdruck für die kritische Zeitschrittweite gemäß BATHE [6]

$$\Delta t_{crit} = \sqrt{\frac{\rho A_Q}{48 EI}} L^2. \quad (3.43)$$

Weiterhin gilt nach CRISFIELD [40] als Grenze für  $\omega_{max}$  die maximale Element-Frequenz  $\omega_{max}^K$  aller Elemente  $K$ ,

$$\omega_{max} \leq \max_K \omega_{max}^K. \quad (3.44)$$

Im Fall des im Kapitel 7 untersuchten Rotorblatts führt dies auf eine kritische Zeitschrittweite von  $\Delta t_{crit} \approx 10^{-4}$  Sekunden, die für Langzeitintegrationen zu einem hohen Rechenaufwand führt.

### Die HHT- $\alpha$ Methode

Durch die Wahl von  $\gamma \neq 1/2$  kann man bei der Newmark-Methode eine algorithmische Dämpfung hoher Frequenzen erzielen. Dies geht jedoch einher mit einer Verschlechterung der Genauigkeit. Aus diesem Grund wurde das Hilber-Hughes-Taylor- $\alpha$  Verfahren [83], auch HHT- $\alpha$  Methode genannt, für lineare Probleme als Variante der Newmark-Methode formuliert. Sie führt ebenfalls die algorithmische Dämpfung hoher Frequenzen ein, ist jedoch immer noch von zweiter Ordnung genau. Die Bewegungsgleichungen lauten hier

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1+\alpha} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1+\alpha} = \mathbf{f}_{ext}(t_{n+1+\alpha}) \quad (3.45)$$

mit

$$\mathbf{d}_{n+1+\alpha} = (1 + \alpha)\mathbf{d}_{n+1} - \alpha\mathbf{d}_n, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{v}_{n+1+\alpha} = (1 + \alpha)\mathbf{v}_{n+1} - \alpha\mathbf{v}_n, \quad (3.47)$$

$$t_{n+1+\alpha} = (1 + \alpha)t_{n+1} - \alpha t_n. \quad (3.48)$$

Die anderen zwei Gleichungen (3.40) und (3.41) des Newmark-Verfahrens bleiben bestehen. Bei einem linearen System erhält man durch Wahl der Parameter  $-1/3 \leq \alpha \leq 0$ ,  $\beta = (1 - \alpha)^2/4$  und  $\gamma = (1 - 2\alpha)/2$  ein unbedingt stabiles Verfahren von zweiter Ordnung [88]. Meist wird  $\alpha = -0.05$  gewählt, für  $\alpha = 0$  erhält man wieder das Newmark-Verfahren. Umfangreiche Untersuchungen zu Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften der Newmark- und HHT- $\alpha$  Methoden für lineare Probleme finden sich in HUGHES [88] und WOOD [205]. CARDONA und GERADIN empfehlen in [28] und [29] die Verwendung des HHT- $\alpha$  Algorithmus für flexible Mehrkörper-Systeme. Sie zeigen, daß bei der Behandlung von Nebenbedingungen durch Lagrange-Multiplikatoren, zum Beispiel aufgrund von Kugel- oder Kardangelenken und Drehachsen, die Dämpfung hoher Frequenzen unabdingbar für die Stabilität der Zeitintegration ist. Das Newmark-Verfahren zeigt bei solchen Systemen ein schwach instabiles Verhalten.

### Die generalisierte $\alpha$ -Methode

Eine Weiterentwicklung des HHT- $\alpha$  Verfahrens stellt die generalisierte  $\alpha$ -Methode von CHUNG und HULBERT [34] dar. Dieses Verfahren übernimmt den Ansatz des HHT- $\alpha$  Algorithmus, ändert die Bezeichnung von  $\alpha$  zu  $\alpha_f$  und führt einen zusätzlichen Parameter  $\alpha_m$  ein, der den Trägheitsterm der Bewegungsgleichungen wie folgt verändert:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1+\alpha_m} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1+\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1+\alpha_f} = \mathbf{f}_{ext}(t_{n+1+\alpha_f}), \quad (3.49)$$

wobei

$$\mathbf{a}_{n+1+\alpha_m} = (1 + \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} - \alpha_m\mathbf{a}_n \quad (3.50)$$

ist. Die anderen zwei Gleichungen des Newmark-Verfahrens bleiben auch bei dieser Methode bestehen. Die generalisierte  $\alpha$ -Methode ist von zweiter Ordnung genau, wenn

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f \quad (3.51)$$

gilt und unbedingt stabil, wenn

$$-\alpha_m \leq -\alpha_f \leq 1/2 \quad \text{sowie} \quad (3.52)$$

$$\beta \geq 1/4 + 1/2(-\alpha_f + \alpha_m) \quad (3.53)$$

gewählt wird. Für die Wahl von  $\beta = 1/4(1 + \alpha_m - \alpha_f)^2$  ist die algorithmische Dämpfung der hohen Frequenzen maximal. Eine detaillierte Analyse dieser Methode ist im Artikel von CHUNG und HULBERT [34] zu finden, eine Interpretation dieses Verfahrens im Kontext nichtlinearer Probleme bei KUHLE und RAMM [113].

### 3.2.2 Die $cG(q)$ Methode

Eine andere Art der Herangehensweise besteht in der Verwendung der Methode der Finiten Elemente auch für die Zeitdiskretisierung, siehe ERIKSSON et al. [51], die in diesem Abschnitt vorgestellt werden soll. Der Name  $cG(q)$  bedeutet „continuous Galerkin“ mit der Ordnung  $q$ . Das bedeutet, daß der zeitliche Verlauf der Variablen mit stetigen Funktionen approximiert wird, die Ableitungen bis zur Ordnung  $q$  besitzen. Dies steht im Gegensatz zur  $dG(q)$  Methode, bei der unstetige Funktionen verwendet werden, also Sprünge an den durch die Zeitpunkte  $t_n$  gegebenen Elementgrenzen auftreten können. Die  $cG(q)$  Methode basiert auf einer Variationsformulierung des Systems 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, \quad 0 < t \leq T, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}\tag{3.54}$$

Gesucht ist die vektorwertige Funktion  $\mathbf{x} \in C^{(q)}([0, T])$ , so daß

$$\int_0^T \langle \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t), \delta \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle dt = 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\varphi} \in C^{(q)}([0, T]),\tag{3.55}$$

wobei  $C^{(q)}([0, T])$  die Menge der Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur Ordnung  $q$  auf  $[0, T]$  bezeichnet. Nun konstruiert man eine stückweise polynomiale Approximation  $\mathbf{x}_k$  für  $\mathbf{x}$ . Dazu teilt man das Intervall  $[0, T]$  in

$$0 := t_0 < t_1 < \dots < t_N := T\tag{3.56}$$

und definiert die Zeitschrittweite  $\Delta t_n := t_n - t_{n-1}$  sowie  $I_n := [t_{n-1}, t_n]$ . Als Ansatz für die finiten Elemente wird der Raum  $\mathcal{C}^{(q)} = \mathcal{C}^{(q)}([0, T])$  der kontinuierlichen Polynome des Grades  $q$  auf jedem Intervall  $I_n$  gewählt,

$$\mathcal{C}^{(q)} := \left\{ U \in C^0([0, T]) : U|_{I_n} \in \mathcal{P}^{(q)}(I_n), \quad 1 \leq n \leq N \right\},\tag{3.57}$$

wobei  $\mathcal{P}^{(q)}(I_n)$  die Menge der Polynome in  $\mathbb{R}^d$  des Grades  $q$  auf  $I_n$  bezeichnet. Aufgrund der Kontinuitätsanforderung hat eine Funktion in  $\mathcal{C}^{(q)}$  nur  $q$  Freiheitsgrade auf jedem Intervall. Der Testraum wird definiert durch

$$\mathcal{D}^{(q-1)} = \mathcal{D}^{(q-1)}([0, T]) := \left\{ U : U|_{I_n} \in \mathcal{P}^{(q-1)}(I_n), \quad 1 \leq n \leq N \right\}.\tag{3.58}$$

Diese Funktionen sind im allgemeinen nicht stetig,  $U_n^{+, -}$  bezeichnet den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von  $U \in \mathcal{D}^{(q-1)}$  am Zeitpunkt  $t_n$  und  $[U]_n := U_n^+ - U_n^-$  den Sprung an  $t_n$ . Für  $1 \leq n \leq N$  bestimmt die  $cG(q)$  Methode die Approximation  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{C}^{(q)}$  der Gleichung

$$\sum_{n=1}^N \int_{I_n} \langle \dot{\mathbf{x}}_k + \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, t), \delta \boldsymbol{\varphi}_k \rangle dt = 0, \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\varphi}_k \in \mathcal{D}^{(q-1)}.\tag{3.59}$$



Gilt  $q = 1$ , dann ist  $\mathbf{x}_k$  die stückweise lineare Funktion

$$\mathbf{x}_k|_{I_n} = \mathbf{x}_{k,n-1} \frac{(t - t_n)}{-\Delta t_n} + \mathbf{x}_{k,n} \frac{(t - t_{n-1})}{\Delta t_n}, \quad (3.60)$$

wobei der Koeffizient  $\mathbf{x}_{k,n}$  die Lösung der Gleichung

$$\mathbf{x}_{k,n} + \int_{I_n} \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t), t) dt = \mathbf{x}_{k,n-1} \quad (3.61)$$

ist. Wertet man das Integral mit der Trapezregel aus,

$$\int_{I_n} \mathbf{g}(\mathbf{x}_k(t), t) dt \approx \frac{\Delta t_n}{2} [\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k,n-1}, t_{n-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k,n}, t_n)], \quad (3.62)$$

so erhält man das klassische Verfahren der Trapezregel für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, welches mit dem Newmark-Verfahren für die Parameter-Wahl von  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  übereinstimmt [5].

### 3.2.3 Energie-Impuls Verfahren

Es hat sich gezeigt, daß die Eigenschaft der unbedingten Stabilität der vorgestellten impliziten Verfahren für lineare Probleme nicht ohne weiteres auf nichtlineare Probleme übertragbar ist. Herkömmliche Integrationsverfahren wie die Newmark- oder HHT- $\alpha$  Methode zeigen Stabilitätsprobleme in der nichtlinearen Strukturdynamik, wenn gleichzeitig große Starrkörper-Rotationen und kleine elastische Verformungen auftreten. CRISFIELD [40] zeigt, daß bei der Wahl eines zu großen Zeitschritts bei der Integration mit dem Newmark-Verfahren die Energie im betrachteten System ansteigen kann. Das führt zu unphysikalischen Lösungen oder Verlust der Stabilität. Weitere Beispiele für ein Versagen des Newmark-Verfahrens bei Verwendung zu großer Zeitschritte finden sich bei SIMO [175].

Basierend auf diesen Erfahrungen sind Zeitintegrationsverfahren für die nichtlineare Strukturdynamik entwickelt worden, die verbesserte Stabilitätseigenschaften für die Langzeitintegration aufweisen. Nach SANSOUR [167] besteht die Hauptidee dieser Verfahren darin, daß bestimmte Erhaltungsgrößen, die das dynamische System aufweist, auch im diskreten Problem erhalten bleiben müssen:

- Impulserhaltung bei Abwesenheit von äußeren Kräften;
- Drehimpulserhaltung bei Abwesenheit von äußeren Kräften und Momenten;
- Energieerhaltung im Falle eines Hamiltonschen Systems, also bei Abwesenheit von dissipativen und nicht konservativen Kräften;
- Erhaltung der symplektischen Struktur bei Hamiltonschen Systemen.

Verfahren dieser Art findet man zum Beispiel bei SIMO et al. [175, 176, 179], SANSOUR et al. [165], KUHLE und CRISFIELD [112] oder BETSCH und STEINMANN [20] sowie den darin enthaltenen Literaturverweisen. Bei einem nicht-Hamiltonschen System kann man nicht von der Erhaltung der Energie ausgehen. Die Verwendung von Energie-Impuls Verfahren kann jedoch in solchen Fällen aus Stabilitätsgründen notwendig sein, denn die Eigenschaft der Langzeitstabilität wird auch auf dissipative Systeme übertragen, wie die Erfahrungen zeigen [167].

Obwohl Energie-Impuls Verfahren oft gute Ergebnisse aufweisen, kann das Fehlen von numerischer Dämpfung der hohen Frequenzen laut BAUCHAU [9] ein Problem darstellen. Zum einen enthalten die Zeitverläufe von Geschwindigkeit und den inneren Kräften teilweise einen sehr großen Anteil hoher Frequenzen, durch den die physikalische Bedeutung dieser Verläufe sehr fragwürdig wird. Zum anderen kann das Vorhandensein von hochfrequenten Oszillationen den Konvergenzprozess zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems beeinträchtigen oder verhindern [113, 10]. Auch die Wahl kleinerer Zeitschritte vermeidet dieses Problem nicht, da hierdurch noch höhere Frequenzen in der Lösung auftauchen. Des weiteren machen die hochfrequenten Oszillationen die genaue Erhaltung der Energie sehr schwierig. Aufgrund dieser Probleme sind unter anderem von ARMERO und ROMERO [4], KUHLE und CRISFIELD [112] sowie BAUCHAU [8] Integrationsalgorithmen entwickelt worden, die eine durch einen Parameter kontrollierbare numerische Dämpfung von hohen Frequenzen beinhalten.

KRYSL, LALL und MARSDEN [109] dagegen verwenden zur Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichungen der Strukturdynamik das Newmark-Verfahren. Diese Wahl begründen sie mit den Ergebnissen von KANE et al. [101]. Dort wird gezeigt, daß die Algorithmen der Newmark-Familie „variational integrators“, also symplektisch und impuls-erhaltend sind. Auch zeigen sie ein sehr gutes globales Energie-Verhalten. Das bedeutet, daß die Energie in engen Grenzen schwankt. Hierauf ist gemäß [101] die erfolgreiche Anwendung des Newmark-Verfahrens in den letzten 30 Jahren begründet. Die Stabilitätsprobleme von Newmark- und HHT- $\alpha$  Verfahren bei nichtlinearen Problemen seien durch die Wahl eines zu großen Zeitschritts hervorgerufen. Das zeigt auch ein Beispiel in CRISFIELD [42], wo das Newmark-Verfahren mit einer geringeren Zeitschrittweite stabiles statt instabiles Verhalten zeigt.

Nun stellt sich die Frage, welcher Zeitintegrationsalgorithmus für die vorgestellte Aufgabe der Langzeitsimulation der Windturbine gewählt werden sollte. Die flexiblen Komponenten der Windturbine werden mit nichtlinearen Balkenelementen von CARDONA und GERADIN [27] modelliert. Diese Autoren schlagen die Verwendung der HHT- $\alpha$  Methode vor. Doch auch die Newmark-Methode kann in diesem Fall angewendet werden, denn die im System der Windturbine aufgrund der vorhandenen Drehachsen auftretenden Kopplungsbedingungen werden nicht durch Lagrange-Multiplikatoren modelliert, sondern beim Aufbau des Gesamtsystems explizit berücksichtigt. Somit tritt die oben erwähnte Instabilität des Newmark-Verfahrens aufgrund der Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren nicht auf. Verwendet man zur Effizienzsteigerung die im nächsten Ka-

pitel beschriebene projektionsbasierte Modellreduktion, werden die hohen Frequenzen aus dem System entfernt. Dann ist die Verwendung der HHT- $\alpha$  oder generalisierten  $\alpha$ -Methode für das reduzierte Modell nicht notwendig. Man könnte sogar, wie von BUCHER [25] vorgeschlagen, zur Zeitintegration des reduzierten Modells ein explizites Verfahren verwenden.

Die Stabilitätsprobleme des Newmark-Verfahrens beim gleichzeitigen Auftreten von großen Starrkörper-Rotationen und kleinen elastischen Dehnungen werden durch die Transformation der Bewegungsgleichungen der Rotorblätter in ein rotierendes System vermieden oder zumindest verringert. In diesem System zeigen die Bewegungsgleichungen nur moderate geometrische Nichtlinearitäten. Die Erfahrungen von SANSOUR [167] zeigen weiterhin, daß für Strukturen, die aus nichtlinearen Balkenelementen aufgebaut sind, das Newmark-Verfahren für die Langzeitintegration geeignet ist. Diese Erfahrung wird durch die bisherigen Ergebnisse der Simulation der Windturbine gestützt, denn auch bei der Wahl von großen Zeitschritten konnten keine Instabilitäten der Zeitintegration festgestellt werden. Deshalb ist die Verwendung von speziellen Energie-Impuls Verfahren aus Stabilitätsgründen bei dem in dieser Arbeit verwendeten Strukturmodell unnötig.

Allerdings ist der Zweck der Windturbine die Umwandlung der Strömungsenergie der Luft in elektrische Energie, und die korrekte Berechnung dieses Energieertrags ist eines der Ziele der Simulation. Die aerodynamischen Kräfte können die Bewegungen der Turbine sowohl dämpfen als auch anfachen. Es ist also sowohl Energiezufuhr wie auch Dissipation von Energie möglich. Die Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung ist anders als zum Beispiel bei Sternbewegungen physikalisch nicht vorhanden. Jedoch kann durch die algorithmische Energiedissipation ein so großer Anteil der durch die aerodynamischen Kräfte zugeführten Energie verloren gehen, daß die Simulationsergebnisse hierdurch verfälscht würden. Das ist vor allem bei der Beschreibung der Balkendynamik im Inertialsystem der Fall. Aufgrund der Transformation der Bewegungsgleichungen der Rotorblätter in ein rotierendes System, dessen Lage, Drehgeschwindigkeit und -beschleunigung durch die Lösung eines Hilfssystems bestimmt wird,

$$J_{rotor}\ddot{\varphi} = M_{ext,rotor}(\varphi, \dot{\varphi}), \quad (3.63)$$

wird die algorithmische Energiedissipation stark verringert. Das zeigt das folgende numerische Experiment: Betrachtet wird ein gerader elastischer Balken, der sich um eine Achse durch seinen Schwerpunkt senkrecht zur Balkenachse frei drehen kann. Als Anfangsbedingung wird eine Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben, die einer Starrkörperrotation um diese Achse entspricht. Da keine Kräfte auf den Balken einwirken, muß seine Energie erhalten bleiben, er sich also mit gleichbleibender Drehgeschwindigkeit bewegen. Der Balken wird einerseits mit den nichtlinearen Balkenelementen im Inertialsystem, andererseits mit den Balkenelementen im mitrotierenden System modelliert. Lage, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung des mitrotierenden Systems sind Lösung der Hilfsgleichung (3.63). In Abb. 3.3 ist die Trajektorie des Endpunktes des Balkens

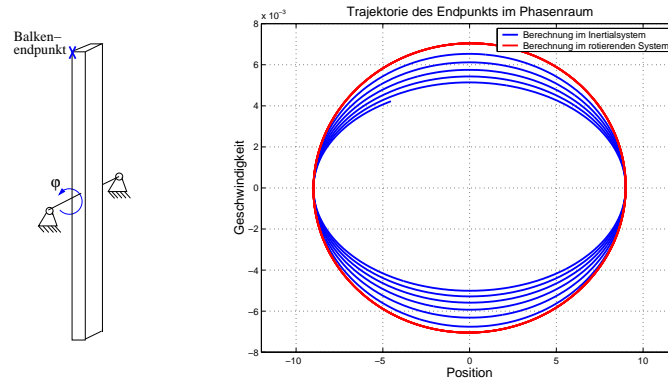


Abbildung 3.3 Trajektorie des Balkenendpunkts im Phasenraum.

im Phasenraum dargestellt. Man erkennt deutlich die einwärts gerichtete Spirale der Bewegung im Inertialsystem, der drehende Balken verliert anscheinend Energie. Anders dagegen im mitrotierenden System, hier erkennt man eine gleichbleibende Kreisbewegung mit konstanter Energie. Der algorithmische Verlust von Energie ist somit durch die Beschreibung der Bewegung im Inertialsystem begründet. Das Auftreten von großen Starrkörper-Rotationen führt dazu, daß das Newmark-Verfahren dissipativ wird. In Abb. 3.4 werden die Lösungen für die Position des Balken-Endpunktes über der Zeit mit der analytischen Lösung verglichen. Hier erkennt man, daß auch bei der Lösung im mitrotierenden System ein Phasenfehler auftritt, dieser ist jedoch sehr viel geringer als der Phasenfehler der im Inertialsystem berechneten Lösung.

Aus diesen Gründen wird die Zeitintegration des reduzierten Modells mit dem Newmark-Verfahren mit  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  durchgeführt. Für die Zeitintegration des gesamten Strukturmodells zur Berechnung von Referenz-Lösungen wird entweder das Newmark- oder falls nötig das HHT- $\alpha$  Verfahren verwendet. Ein weiterer Vorteil bei der Verwendung des Newmark-Verfahrens mit  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  ist die Tatsache, daß dieser Algorithmus äquivalent zum  $cG(1)$  Verfahren ist, wodurch die Abschätzung des durch die Modellreduktion hervorgerufenen Fehlers in Raum und Zeit ermöglicht wird.

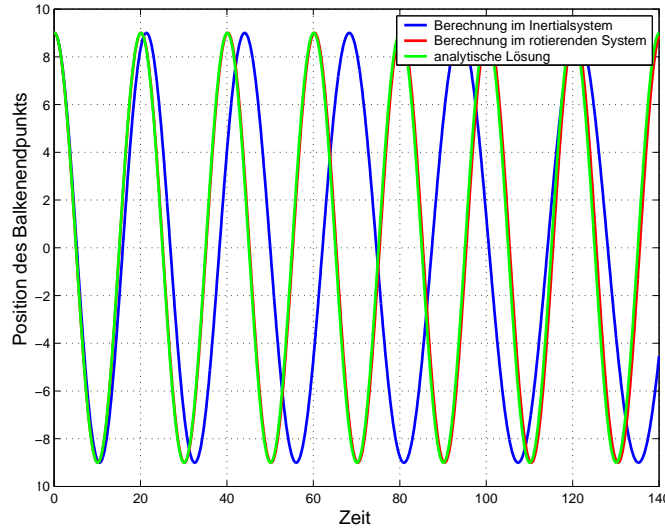


Abbildung 3.4 Vergleich der Berechnung im Inertialsystem und der Berechnung im rotierenden System mit der analytischen Lösung.

### 3.2.4 Zeitdiskretisierung der Strukturgleichungen

In diesem Abschnitt soll detaillierter auf die Diskretisierung der nichtlinearen Strukturgleichungen mit dem Newmark-Verfahren eingegangen werden. Die Werte zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  müssen das Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}, t_{n+1}) = 0 \quad (3.64)$$

erfüllen. Hierbei stellen  $\mathbf{d}_{n+1}$ ,  $\mathbf{v}_{n+1}$  und  $\mathbf{a}_{n+1}$  die Approximationen von  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\ddot{\mathbf{d}}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  dar. Die Werte  $\mathbf{d}_n$ ,  $\mathbf{v}_n$  und  $\mathbf{a}_n$  des vorangegangenen Zeitschritts  $t_n$  werden als bekannt vorausgesetzt. Zusätzlich werden die beiden Gleichungen (3.40, 3.41) benötigt. Löst man diese nach  $\mathbf{a}_{n+1}$  und  $\mathbf{v}_{n+1}$  auf und setzt sie in die Bewegungsgleichung (3.64) ein, so erhält man ein nichtlineares Gleichungssystem in den Variablen  $\mathbf{d}_{n+1}$ . Dieses nichtlineare Gleichungssystem wird meist mit dem Newton-Raphson Verfahren oder Varianten dieses Verfahrens gelöst [162, 104]. Hierfür ist eine Linearisierung der Gleichung (3.64) erforderlich. Diese ist analytisch sehr mühselig zu bestimmen. Aus diesem Grund werden mittels des Computer-Algebraprogramms Maple die Jakobi-Matrizen durch automatische Differenzierung bestimmt. Nähere Informationen zu diesem Vorgehen und eine beispielhafte Implementierung sind in FORSELL [61] zu finden. Der Newmark-Algorithmus für einen Zeitschritt bei Verwendung des Newton-

Raphson Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems lautet:

$$\left. \begin{aligned}
i &\leftarrow 0 \\
\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{d}_n \\
\mathbf{a}_{n+1}^{(i)} &= -\frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{v}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\mathbf{a}_n \\
\mathbf{v}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{v}_n + \Delta t \left[ (1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \right] \\
\boldsymbol{\rho}^{(i)} &= \mathbf{f}(\mathbf{a}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, t_{n+1})
\end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Startwert der Iteration} \\ \\ \\ \text{Residuum} \end{array}$$
  

$$\begin{aligned}
i &\leftarrow i + 1 \\
\mathbf{K}_{\text{eff}}^{(i)} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}
\end{aligned} \quad \text{effektive Steifigkeitsmatrix}$$
  

$$\Delta\mathbf{d}^{(i)} = -(\mathbf{K}_{\text{eff}}^{(i)})^{-1}\boldsymbol{\rho}^{(i)} \quad \text{Verschiebungsinkrement}$$
  

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{d}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{d}_n^{(i-1)} + \Delta\mathbf{d}^{(i)} \\
\mathbf{v}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{v}_n^{(i-1)} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{d}^{(i)} \\
\mathbf{a}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{a}_n^{(i-1)} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{d}^{(i)}
\end{aligned} \right\} \quad \text{Update der Variablen}$$
  

$$\boldsymbol{\rho}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{a}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, t_{n+1}) \quad \text{Neues Residuum}$$

Wenn  $\|\boldsymbol{\rho}^{(i)}\| > \epsilon\|\boldsymbol{\rho}^{(0)}\|$  beginne nächste Iteration,  $i = i + 1$   
andernfalls setze  $t \leftarrow t + \Delta t$  und beginne von oben.

Hierbei ist  $\mathbf{K}_{\text{eff}}$  die Jakobimatrix, in der Strukturdynamik auch effektive Steifigkeitsmatrix genannt,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\text{eff}} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{a}_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{v}_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \\
&= \mathbf{M} \frac{1}{\beta\Delta t^2} + \mathbf{C} \frac{\gamma}{\beta\Delta t} + \mathbf{K}
\end{aligned} \quad (3.65)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}_{n+1}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}_{n+1}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}}. \quad (3.66)$$

### 3.2.5 Zeitdiskretisierung der aerodynamischen Gleichungen

Wie im Anhang dargestellt, erfordert die Modellierung der instationären aerodynamischen Lasten die Einführung eines zusätzlichen dynamischen Systems mit fünf Freiheitsgraden an jedem Gaußpunkt der Balkenelemente, an denen die aerodynamischen Lasten

pro Längeneinheit berechnet werden. Dieses dynamische System ist als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung gegeben,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_A \mathbf{x} + \mathbf{S}_B \mathbf{u}_a = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (3.67)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_C \mathbf{x} + \mathbf{S}_D \mathbf{u}_a. \quad (3.68)$$

Die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}_a$  und auch die Matrizen  $\mathbf{S}_A$ ,  $\mathbf{S}_B$  und  $\mathbf{S}_C$  sind abhängig von den Strukturvariablen  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  und  $\ddot{\mathbf{d}}$  des zugehörigen Elements  $K$ . Als Integrationsverfahren bietet sich die Trapezregel an. Auf diese Weise werden Struktur und aerodynamisches System mit einem impliziten Verfahren 2. Ordnung integriert und Stabilitätsprobleme beim aerodynamischen System sind nicht zu befürchten. Man erhält die diskretisierte Form zu

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{g}(t_n, \mathbf{x}_n) + \mathbf{g}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1})]. \quad (3.69)$$

Somit ist in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem der Form

$$(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_{A,n+1}) \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_{A,n}) \mathbf{x}_n + \mathbf{S}_{B,n} \mathbf{u}_{a,n} + \mathbf{S}_{B,n+1} \mathbf{u}_{a,n+1} \quad (3.70)$$

für jeden Gaußpunkt zu lösen.





## 4 Projektionsbasierte Modellreduktion

Trotz der Zunahme der Rechengeschwindigkeit in den letzten Jahren ist die Analyse von nichtlinearen instationären Aufgabenstellungen immer noch recht aufwendig. Vor allem dann, wenn viele Rechnungen durchgeführt werden müssen, die sich nur geringfügig unterscheiden, zum Beispiel durch eine veränderte Anregung eines ansonsten gleichgebliebenen Systems, kann die Modellreduktion den Rechenaufwand signifikant senken. Das ist zum Beispiel bei der Berechnung der Ermüdungsbelastung der Windkraftanlage der Fall.

Meistens werden die das System beschreibenden partiellen Differentialgleichungen zunächst mittels der Methode der Finiten Elemente im Raum diskretisiert. Hierdurch erhält man ein großes System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Verwendet man zur nachfolgenden zeitlichen Diskretisierung explizite Verfahren, vermeidet man das häufige Lösen großer Gleichungssysteme. Als Nachteil tritt jedoch die Beschränkung der Zeitschrittweite aus Stabilitätsgründen auf. Implizite Zeitschrittverfahren erfordern die mehrfache Lösung eines großen Systems linearer Gleichungen pro Zeitschritt. Das kann sowohl aufgrund der Speicheranforderungen als auch aufgrund der benötigten Rechenzeit sehr aufwendig sein. Vorteilhaft ist das verbesserte Stabilitätsverhalten dieser Verfahren, das größere Zeitschritte ermöglicht [206].

In beiden Fällen ist der Rechenaufwand hoch und kann mit Hilfe der Modellreduktion verringert werden. Bei expliziter Zeitintegration können durch die Modellreduktion die hohen Frequenzen, die aufgrund der feinen räumlichen Diskretisierung im System vorhanden sind, physikalisch aber keine Bedeutung haben, entfernt und somit die Zeitschrittweite vergrößert werden, wie bei BUCHER [25] dargestellt. Bei der Verwendung impliziter Zeitintegrationsverfahren wird, wie z.B. von KRYSL et al. [109] oder REMKE und ROTHERT [160] gezeigt, durch die Modellreduktion die Größe des wiederholt zu lösenden linearen Gleichungssystems stark verringert und somit auch der Rechenaufwand.

Die Idee der Modellreduktion liegt darin, von den vorhandenen Variablen, zum Beispiel den Knotenvariablen eines FE-Modells, zu möglichst wenigen generalisierten Koordinaten zu wechseln, welche die großräumigen Strukturen berücksichtigen, die in den meisten Fällen die Systemantwort dominieren. Betrachtet man zum Beispiel die Schwingung eines eingespannten und durch eine äußere Kraft erregten Balkens, so ist die Darstellung des Verschiebungsfeldes durch die Superposition von Eigenschwingungsformen vorteil-

haft, da oft, abhängig vom Frequenzgehalt der äußeren Anregung, nur eine sehr geringe Anzahl von Eigenformen notwendig ist, um die Schwingungen mit guter Genauigkeit wiederzugeben. Das gilt ebenfalls für Probleme der Fluidodynamik, wo das Auftreten von „kohärenten Strukturen“ beobachtet wird [85], zum Beispiel den Wirbeln im Nachlauf eines umströmten Körpers. Das Ziel der Modellreduktion ist somit, eine möglichst geringe Zahl von generalisierten Koordinaten zu finden, mit denen die Systemantwort möglichst gut approximiert werden kann.

Im folgenden wird zunächst das Vorgehen der Modellreduktion beschrieben. Daran anschließend werden drei verschiedene Methoden zur Berechnung von Basisvektoren dargestellt. Diese drei Basen werden dann in Kapitel 7 im Hinblick auf die erzielbare Approximationsgüte für die Simulation der Windkraftanlage verglichen.

## 4.1 Vorgehen der Reduktion

Die Bewegungsgleichung des Systems kann nach erfolgter räumlicher Diskretisierung als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung dargestellt werden,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Die Dimension dieses Systems sei  $d$ , d.h.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . Zur Durchführung der Reduktion muß nun zunächst ein Ansatz der Form

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_m = \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j \xi_j(t) = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}(t)\tag{4.2}$$

gewählt werden. Die Matrix  $\mathbf{Y}_m = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m]$  wird durch  $m$  spaltenweise angeordnete Vektoren gebildet. Die Vektoren müssen linear unabhängig sein, damit sie einen Unterraum  $\mathcal{Y}_m$  der Dimension  $m$  aufspannen,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{Y}_m = \text{span}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ . Dieser Raum wird als Ansatzraum bezeichnet. Zusätzlich zum Ansatzraum  $\mathcal{Y}_m$  muß ein Testraum  $\hat{\mathcal{Y}}_m = \text{span}\{\hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_m\}$  gewählt werden. Hier gibt es zwei Möglichkeiten: Beim Bubnov-Galerkin Verfahren stimmen Ansatz- und Testraum überein, beim Petrov-Galerkin Verfahren sind sie unterschiedlich. Im folgenden soll zur Vereinfachung davon ausgegangen werden, daß Ansatz- und Testraum übereinstimmen, also  $\mathbf{Y}_m = \hat{\mathbf{Y}}_m$  gilt. Durch die im folgenden beschriebenen Schritte führt man eine Reduktion der Systemgröße von  $d$  auf  $m$  durch, also ist  $1 < m \ll d$  wünschenswert.

Setzt man die Näherung (4.2) für  $\mathbf{x}$  und deren Ableitung in Gl. (4.1) ein, so gilt im allgemeinen für das Residuum  $\boldsymbol{\rho}$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{Y}_m \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{g}(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t) \neq \mathbf{0}.\tag{4.3}$$

Im letzten Schritt des Reduktionsprozesses projiziert man durch Multiplikation mit  $\mathbf{Y}_m^T$  von links das Residuum auf den Unterraum  $\mathcal{Y}_m$  und fordert, daß dieses projizierte Residuum gleich Null sei, Galerkin-Bedingung genannt. Man erhält das reduzierte Problem der Dimension  $m$ ,

$$\mathbf{Y}_m^T \mathbf{Y}_m \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Y}_m^T \mathbf{g}(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Die Näherung  $\mathbf{x}_m$  weist jedoch in den meisten Fällen gegenüber  $\mathbf{x}$  einen Fehler  $\mathbf{e}$  auf,

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_m. \quad (4.5)$$

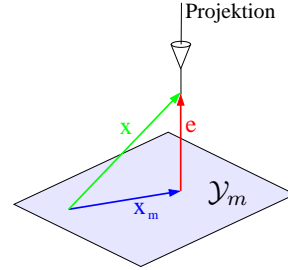


Abbildung 4.1 Zerlegung von  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{x}_m$  und  $\mathbf{e}$ .

Dieser Fehler  $\mathbf{e}$ , siehe Abb. 4.1, ist orthogonal zum Testraum  $\mathcal{Y}_m$  und kommt dadurch zustande, daß nur der Teil  $\mathbf{x}_m$  der Lösung  $\mathbf{x}$  berechnet wird, welcher im gewählten Unterraum liegt. Dies wird auch mit dem Begriff der Galerkin-Orthogonalität bezeichnet. Als Indikator für die Güte der Approximation  $\mathbf{x}_m$  kann die Norm des Residuums  $\|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_m)\|$  dienen. Eine Abschätzung des tatsächlich vorhandenen Fehlers  $\mathbf{e}$  ist damit jedoch nicht möglich.

## 4.2 Wahl der Basisvektoren

Die Wahl der Basisvektoren entscheidet über die Güte des reduzierten Modells. Man muß dabei zwischen den Begriffen Unterraum und Basis unterscheiden. Ein- und derselbe Unterraum kann durch eine Vielzahl unterschiedlicher Basen aufgespannt werden. Wählt man eine orthogonale Basis für Ansatz- und Testraum, erzielt man die besten Ergebnisse im Hinblick auf die Vermeidung von schlechter Konditionierung des zu lösenden Gleichungssystems [51]. Ein Satz von Vektoren  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$  ist orthogonal, wenn  $\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_j = 0$  für  $i \neq j$  gilt und orthonormal, wenn zusätzlich  $\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i = 1$  gilt. Die Vektoren  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  bilden eine orthonormale Basis für den Unterraum  $\mathcal{Y}_m$ , wenn sie orthonormal sind und  $\mathcal{Y}_m$  aufspannen. Eine Menge von Unterräumen  $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n$  ist gegenseitig orthogonal, wenn  $\mathbf{y}^T \mathbf{z} = 0$  gilt für  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_i$  und  $\mathbf{z} \in \mathcal{Y}_j$ ,  $i \neq j$ .

Über die Wahl von Basisvektoren für Probleme der Strukturodynamik sind eine Vielzahl von Literaturstellen zu finden. Einen Überblick geben die Artikel von DINKLER [46] und NOOR [138] sowie LEGER und DUSSAULT [118]. Im folgenden werden die wichtigsten Ansätze kurz vorgestellt.

In der linearen Strukturodynamik ist die Verwendung von Eigenschwingungsformen der Struktur weit verbreitet. Das Verfahren wird modale Reduktion genannt und führt bei linearen Gleichungen zu einer Entkopplung der Bewegungsgleichungen. Weiterhin bieten sich hier aufgrund der physikalischen Bedeutung der Basisvektoren Kriterien für die

Selektion der „wichtigen“ Vektoren an, z.B. basierend auf dem Vergleich des Frequenzgehalts der Anregung mit den Eigenfrequenzen der einzelnen Schwingungsformen. In der Arbeit von NICKELL [137] wird die modale Reduktion erstmals für nichtlineare Probleme vorgeschlagen. Dabei wird an jedem diskreten Zeitpunkt das durch die Linearisierung entstehende Eigenwertproblem gelöst und die Basis neu berechnet. Die wiederholte Lösung eines Eigenwert-Problems ist hierbei ein hoher Kostenfaktor. Weiterhin kann man zeigen [93], daß die häufige Änderung der Basis der Einführung einer zeitabhängigen Nebenbedingung gleicht, welche das dynamische Verhalten des Modells stark ändern kann und zu numerischen Problemen führt. Der Grund hierfür liegt in der Notwendigkeit der Projektion der Werte des vorigen Zeitschritts in den neuen Unterraum. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung des Lanczos-Algorithmus zur Generierung von Basisvektoren, siehe zum Beispiel NOUR-OMID und CLOUGH [140] oder WILSON et al. [203]. Vorteilhaft ist hier, daß kein Eigenwert-Problem gelöst werden muß. Weiterhin berücksichtigt dieses Vorgehen die räumliche Verteilung der Last. ALMROTH et al. [2] schlagen vor, das Verschiebungssinkrement der ersten Iteration während der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems als zusätzlichen Vektor in der derzeitigen Basis zu benutzen. NOOR und PETERS [139] verwenden Ableitungen des Lösungspfades der aktuellen Lösung als generalisierte Koordinaten. Weiterhin haben NOOR [138] sowie HÄNLE et al. [82] eine Mischung aus linearen Schwingungsformen und Lanczos-Vektoren vorgeschlagen. IDELSON und CARDONA [93] verwenden tangential-eigenschwingungsformen zusammen mit ihren approximierten Zeitableitungen. Sie zeigen, daß aufgrund der Notwendigkeit, die derzeitigen Verschiebungen als Anfangsbedingungen auf die neue Basis zu projizieren, jeder Basiswechsel zu einer Erhöhung des Fehlers führt. CHAN und HSIAO [32] berechnen orthogonalisierte Verschiebungsvektoren als Basis für eine nichtlineare statische Analyse. CHANG und ENGBLOM [33] verwenden Lanczos-Vektoren zusammen mit einer Bewertung der Partizipation der individuellen Vektoren in der Antwort zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung von „empirischen Eigenvektoren“. Diese Basis tritt in einer Vielzahl von Bezeichnungen auf, als Karhunen-Loève Entwicklung [103, 124], Hauptkomponenten-Analyse [86], empirische orthogonale Eigenvektoren [127], Faktoren-Analyse [80], „proper orthogonal decomposition“ [128] und „total least squares“ [71]. Anwendungen dieser im folgenden als Karhunen-Loève (KL) Basis bezeichneten Basis finden sich in vielen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen, zum Beispiel in der Turbulenzforschung, Bilderkennung oder Datenreduktion. Weitere Informationen hierzu finden sich in HOLMES et al. [85] oder SIROVITCH und EVERSON [181]. Durch Verwendung der KL Basis wird die raum-zeitliche Dynamik auf einen Unterraum projiziert, in dem die dominierende Dynamik stattfindet. Die zeitlich konstanten Eigenfunktionen repräsentieren die beständigsten Strukturen, die in der Systemantwort auftauchen. Un-typische Strukturen wie zum Beispiel Rauschen in der Systemantwort können dadurch eliminiert werden. Für die Anwendung der KL Methode ist keine a-priori Information über das untersuchte System notwendig: Die KL Basis wird aus einem vorliegenden Da-

tensatz der Strukturbewegung generiert. Man muß somit das vollständige System von Differentialgleichungen zumindest einmal für eine gewisse Zeitspanne komplett lösen, um die Datenbasis zu generieren. Die KL Basis wurde zuerst von KREUZER und KUST [108] für Aufgaben der Strukturodynamik angewendet, weiterhin von KRYSL et al. [109] und SANSOUR [166]. Oft kann die Dynamik des Systems durch sehr wenige dieser Eigenfunktionen approximiert werden und man erhält eine sehr effiziente Reduktion der Systemdimension.

Zusammenfassend zeigt sich also, daß für die Reduktion nichtlinearer Bewegungsgleichungen der Strukturodynamik hauptsächlich die modale Basis, verschiedene Formen der Lanczos-Basis und in neuerer Zeit die Karhunen-Loève Basis verwendet werden. Im folgenden werden diese drei Arten zur Generierung einer Basis genauer beschrieben. Weitere Möglichkeiten, zum Beispiel die Verwendung von Bahnableitungen, sollen in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Informationen hierzu findet man in [46, 138, 160].

### 4.2.1 Modale Basis

Die modale Basis geht von der Darstellung des Systems (4.1) in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.6)$$

mit

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad \text{und} \quad \mathbf{h} = \mathbf{g} - \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.7)$$

aus. Berechnet man die Eigenvektoren  $\mathbf{y}_j$  der Matrix  $\mathbf{A}$ , indem man das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \quad (4.8)$$

löst, so folgt der Ansatz für eine reduzierte Basis der Form

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_m = \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j \xi_j = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}. \quad (4.9)$$

Physikalisch interpretiert kann man die Eigenvektoren in der Strukturodynamik meist als Eigenschwingungsformen des Systems am betrachteten Punkt  $\mathbf{x}_0$  deuten. Der Imaginärteil der Eigenwerte gibt die zugeordnete Schwingungsfrequenz und der Realteil die Dämpfung der Eigenform an. Hieraus ergeben sich Kriterien für die Auswahl der  $m$  Basisvektoren für den reduzierten Unterraum: Man vernachlässigt die zu Eigenwerten mit großem Imaginärteil gehörenden Eigenvektoren, da diese hochfrequente Schwingungen darstellen, die einerseits durch die zugrundeliegende FE Diskretisierung nicht ausreichend genau diskretisiert werden und somit sehr ungenau sind. Andererseits tragen sie auch deshalb nicht zur in der Realität beobachtbaren dynamischen Strukturantwort bei, da sie durch die Materialdämpfung sehr schnell „weggedämpft“ werden. Ein weiteres

Kriterium für die Auswahl der Basisvektoren ergibt sich durch den Vergleich von zugeordneter Eigenfrequenz mit dem Frequenzspektrum der äußeren Anregung, da die Strukturantwort von den Eigenformen dominiert wird, deren Frequenzen in der Nähe der Anregungsfrequenzen liegen. Weitere Selektionskriterien finden sich unter anderem in [46, 138].

Setzt man den Ansatz  $\mathbf{x}_m = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}$  in Gl. (4.6) ein, folgt bei symmetrischer Matrix  $\mathbf{A}$  und der Normierung der Eigenvektoren gemäß  $\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i = 1$

$$\mathbf{Y}_m^T \mathbf{A} \mathbf{Y}_m = \text{diag}(\alpha_i), \quad (4.10)$$

$$\dot{\xi}_i + \alpha_i \xi_i + \hat{h}_i(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t) = 0, \quad i = 1 \dots m. \quad (4.11)$$

Hierbei bezeichnet  $\hat{h}_i$  die  $i$ -te Stelle des Vektors  $\mathbf{Y}_m^T \mathbf{h}$ . Bei unsymmetrischer Matrix  $\mathbf{A}$  muss zusätzlich noch das adjungierte Eigenwert-Problem gelöst werden, um eine Diagonalisierung der Matrix  $\mathbf{A}$  zu erreichen [194]. Für die Modellreduktion nichtlinearer Differentialgleichungssysteme ist die Diagonalisierung der Matrix  $\mathbf{A}$  jedoch nicht notwendig, da immer eine Kopplung über den nichtlinearen Term  $\mathbf{h}$  vorliegt und deshalb eine Entkopplung der modalen Freiheitsgrade nicht möglich ist. Aus diesem Grund wird im folgenden auch bei unsymmetrischen Matrizen  $\mathcal{Y}_m$  sowohl als Ansatz- als auch als Testraum verwendet.

#### 4.2.2 Lanczos Basis

Als Krylov-Unterraum der Dimension  $m$  wird der durch folgende Vektoren aufgespannte Unterraum bezeichnet:

$$\mathcal{K}_m = \text{span}\{\mathbf{y}_1, \mathbf{A}\mathbf{y}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{y}_1\}. \quad (4.12)$$

Dieser Unterraum findet Verwendung bei der Berechnung großer Eigenwertaufgaben [164] sowie in Methoden zur iterativen Lösung großer linearer Gleichungssysteme [104]. Er kann jedoch ebenfalls als Basis für die Modellreduktion verwendet werden [203]. Eine orthogonale Basis, die diesen Krylov-Raum aufspannt, kann man zum Beispiel durch die Methode von ARNOLDI berechnen [164]: Zu Beginn wählt man den Startvektor  $\mathbf{y}_1$ ,  $\|\mathbf{y}_1\| = 1$ . Für  $j = 1, 2 \dots m - 1$  berechnet man dann die Lanczos-Vektoren  $\mathbf{y}_j$  gemäß der Vorschrift

$$h_{ij} = \langle \mathbf{A}\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{A}\mathbf{y}_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} \mathbf{y}_i, \quad (4.14)$$

$$h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}_j\|, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{w}_j / h_{j+1,j}. \quad (4.16)$$

In [164] wird gezeigt, daß sich mittels  $\mathbf{Y}_m = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$  die Matrix  $\mathbf{A}$  auf obere Hessenbergform transformieren lässt,

$$\mathbf{Y}_m^T \mathbf{A} \mathbf{Y}_m = \mathbf{H}_m. \quad (4.17)$$

Bei einer oberen Hessenberg-Matrix gilt  $h_{ij} = 0$  für alle Paare  $(i, j)$  mit  $i > j + 1$ . Man erzielt also durch die Wahl der Lanczos-Vektoren keine Diagonalgestalt einer symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$  wie zuvor bei Wahl der Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$ . In der linearen Strukturdynamik wird im Fall eines Differentialgleichungssystems 2. Ordnung meist  $\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}$  verwendet, wobei  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix und  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix darstellt. Als Startvektor wird die statische Lösung unter einer repräsentativen Last  $\mathbf{f}_{ext}$  verwendet,  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{ext}$ .

Die Sequenz der Generierung der Lanczos-Vektoren hat eine interessante physikalische Interpretation, wie in [203] dargestellt wird. Der erste Lanczos-Vektor stellt die statische Antwort der Struktur auf die gewählte Last dar. Die dynamischen Kräfte, welche hierbei vernachlässigt worden sind, haben bei einem linearen Problem die Form  $\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{y}_1$ , wobei  $\omega$  eine typische Frequenz der Last darstellt. Dieser „Fehlervektor“ wird dann im nächsten Schritt als neuer Lastvektor verwendet, um den zweiten Lanczos-Vektor zu generieren. Wiederum wird durch die statische Lösung ein dynamischer Anteil vernachlässigt, welcher dann als Lastvektor für den dritten Lanczos-Vektor verwendet wird.

### 4.2.3 Karhunen-Loève Basis

Aufgrund der Anregung der Windturbine durch turbulenten Wind liegt es nahe, das Antwortverhalten des Systems als stochastischen Prozeß aufzufassen und zu dessen effizienter niedrig-dimensionaler Darstellung statistische Methoden zu verwenden, zum Beispiel die in diesem Abschnitt beschriebene Karhunen-Loève Entwicklung. Die mathematische Basis für die Beschreibung der Karhunen-Loève Entwicklung, im folgenden mit KLE abgekürzt, ist die Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren. Eine Zusammenfassung dieser Theorie im Kontext der KLE findet man zum Beispiel im Anhang von HOLMES et al. [85]. Die Idee der Karhunen-Loève Entwicklung besteht darin, eine endlich-dimensionale Basis zu bestimmen, die eine gegebene Funktion besser approximiert als jede andere Basis gleicher Dimension. Das Vorgehen soll anhand einer Anzahl von Realisierungen  $\{q^k\}$  eines skalaren Felds  $q(x)$  beschrieben werden, das definiert ist auf der Menge  $Q$  im Hilbert-Raum  $L^2(Q)$ . Gesucht ist die Basis  $\{y_j(x)\}_{j=1}^\infty$ , welche optimal ist in dem Sinne, daß die endlich-dimensionale Approximation

$$q_m(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j y_j(x) \quad (4.18)$$

ein typisches Mitglied des Ensembles  $\{q^k\}$  besser beschreibt, als es in jeder anderen Basis gleicher Dimension  $m$  möglich wäre. Die Bezeichnung „typisches Mitglied“ impliziert die Verwendung einer Mittelwertbildung, gekennzeichnet durch das Symbol  $E\{\bullet\}$ ,

auch Erwartungswert genannt: Mathematisch ausgedrückt besteht die Berechnung der optimalen Basis darin, die Basisfunktionen  $y$  so zu wählen, daß der Erwartungswert der Projektion der Funktion  $q$  auf  $y$  maximal wird,

$$\max_{y \in L^2(Q)} \frac{E\{|\langle q, y \rangle|^2\}}{\|y\|^2}. \quad (4.19)$$

Man kann zeigen [85], daß die gesuchten Basisfunktionen Lösungen der folgenden Integralgleichung sind,

$$\int_Q E\{q(x_1)q(x_2)\}y(x_2)dx_2 = \lambda y(x_1), \quad (4.20)$$

deren Kern  $G(x_1, x_2) = E\{q(x_1)q(x_2)\}$  die gemittelte Autokovarianzfunktion der zwei Punkte  $x_1$  und  $x_2$  ist. Im endlich-dimensionalen Fall, wo die Ensemble-Mitglieder  $\{\mathbf{q}^k\}$  Vektoren im  $\mathbb{R}^d$  sind, kann man eine einfache geometrische Deutung dieser optimalen Basis angeben: Die Autokovarianzfunktion wird hier ersetzt durch die  $d \times d$  Matrix

$$\mathbf{G}(x_1, x_2) = E\{\mathbf{q}(x_1) \otimes \mathbf{q}(x_2)\} \quad (4.21)$$

und die Eigenvektoren dieser Matrix sind die Hauptachsen der Wolke von Datenpunkten  $\{\mathbf{q}^k\}$  im Raum  $\mathbb{R}^d$ .

### Anwendung auf die Darstellung der Strukturbewegung

Im folgenden wird beispielhaft die räumlich eindimensionale Funktion  $q(x, t)$ ,  $x \in [0, L]$ ,  $t \in [0, T]$  betrachtet, die die Abweichung der Bewegung einer Struktur vom zeitlichen Mittelwert beschreibt. Diese sei aufgrund der stochastischen Anregung ein im quadratischen Mittel stetiger stochastischer Prozeß mit der Autokovarianzfunktion  $G(x_1, x_2)$ . Mittels der Eigenfunktionen  $\{y_j\}$  des Integraloperators mit dem Kern  $G(\cdot, \cdot)$ ,

$$\int_0^L G(x_1, x_2)y_j(x_2)dx_2 = \lambda_j y_j(x_1), \quad (4.22)$$

und den zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_j$  läßt sich der Prozeß ausdrücken als

$$q(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sqrt{\lambda_j} \xi_j(t) y_j(x). \quad (4.23)$$

Dabei genügen die Funktionen  $\xi_j(t)$  der Gleichung

$$\xi_j(t) = (\sqrt{\lambda_j})^{-1} \int_0^L y_j(x)q(x, t)dx \quad (4.24)$$

und sind unkorreliert, also gilt  $E\{\xi_n \xi_m\} = \delta_{nm}$ .



### Optimalität der Karhunen-Loève Entwicklung

Die Eigenwerte  $\lambda_j$  können interpretiert werden als die mittlere Energie der Bewegung, projiziert auf die Eigenfunktion  $y_j$ : Definiert man die mittlere Energie-Projektion als  $E\{|\langle y_j, q \rangle|^2\}$ , ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$E\{|\langle y_j, q \rangle|^2\} = E\left\{\left|\int_0^L y_j(x)q(x,t)dx\right|^2\right\} = \lambda_j. \quad (4.25)$$

Trifft man die zusätzliche Annahme, daß die Funktion  $q$  ergodisch ist, also

$$E\{q(x,t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(x,t)dt \quad \text{für ein festes } x \quad (4.26)$$

gilt, kann man die Eigenwerte auch als ein Maß für die mittlere Zeitdauer interpretieren, die die Funktion  $q$  entlang der durch  $y_j$  gegebenen Koordinatenachse verbracht hat,

$$\lambda_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle y_j, q(x,t) \rangle|^2 dt. \quad (4.27)$$

Nimmt man an, daß die Eigenwerte  $\lambda_j$  so angeordnet sind, daß  $\lambda_j > \lambda_{j+1} \forall j$  gilt, ergibt sich die Beziehung [18]

$$\sum_{j=1}^m E\{|\langle y_j, q(x,t) \rangle|^2\} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \geq \sum_{j=1}^m E\{|\langle z_j, q(x,t) \rangle|^2\} \quad (4.28)$$

für beliebige  $m$  und beliebige andere Basisvektoren  $z_j$ . Folglich ist von allen möglichen linearen Zerlegungen der Bewegung  $q(x,t)$  für eine gegebene Anzahl  $m$  von Basisvektoren die Karhunen-Loève Entwicklung die effizienteste in dem Sinne, daß die Projektion auf den hiervon aufgespannten Unterraum im Mittel die maximal mögliche Energie enthält.

Optimalität kann auch definiert werden als die Suche nach Basisfunktionen, die die Norm des Abstands zwischen exakter Lösung und der endlich-dimensionalen Approximation minimieren,

$$\left\| q(x,t) - \sum_{j=1}^m \xi_j y_j \right\|^2 = \|q(x,t)\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^m \xi_j y_j \right\|^2 - 2\langle q(x,t), \sum_{j=1}^m \xi_j y_j \rangle. \quad (4.29)$$

Also muß die Summe der Projektionen  $\sum_{j=1}^N \langle q, y_j \rangle$  maximiert werden. Das ist, wie in der Einleitung dieses Abschnitts gezeigt, gerade die der Karhunen-Loève Entwicklung zugrunde liegende Idee.

### Die Methode von Sirovitch

Zur Berechnung der Karhunen-Loève Basis müssen schon bei einer mäßig feinen räumlichen Diskretisierung des Ausgangsproblems die Eigenvektoren einer großen räumlichen Kovarianzmatrix bestimmt werden. Ein Ansatz zur Verringerung dieses Rechenaufwands geht auf SIROVITCH [180] zurück und wird als die „Methode der Schnappschüsse“ bezeichnet:

Man geht davon aus, daß eine Simulation der Bewegung des untersuchten Systems durchgeführt wird, deren Ergebnis ein Bewegungsfeld  $q(x, t)$  ist. Mit  $q(x, n\Delta t) = q_n(x)$  bezeichnet man diskrete „Schnappschüsse“ des Bewegungsfeldes mit konstantem Zeitschritt  $\Delta t$ . Die Anzahl dieser Schnappschüsse sei  $M$ . Mit der Annahme der Ergodizität des untersuchten Prozesses kann die räumliche Kovarianzfunktion geschrieben werden als

$$G(x_1, x_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(x_1, t) q(x_2, t) dt. \quad (4.30)$$

Als Approximation dieser Gleichung verwendet man die berechneten Schnappschüsse, also

$$\hat{G}_M(x_1, x_2) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M q_n(x_1) q_n(x_2). \quad (4.31)$$

Die Funktion  $\hat{G}_M(x_1, x_2)$  wird empirische räumliche Kovarianzfunktion genannt. Zur Berechnung der Basisfunktionen benötigt man den Integraloperator mit dem Kern  $G(x_1, x_2)$ ,

$$\int_0^L G(x_1, x_2) y(x_2) dx_2 \approx \int_0^L \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M q_n(x_1) q_n(x_2) y(x_2) dx_2 \quad (4.32)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M q_n(x_1) \int_0^L q_n(x_2) y(x_2) dx_2 \quad (4.33)$$

$$= \sum_{n=1}^M \alpha_n q_n(x_1). \quad (4.34)$$

Die Eigenfunktionen  $y(x)$  des Integraloperators müssen der Gleichung

$$\sum_{n=1}^M \alpha_n q_n(x) = \lambda y(x) \quad (4.35)$$

genügen. Also können die empirischen Eigenfunktionen geschrieben werden als

$$y(x) = \sum_{n=1}^M \beta_n q_n(x) = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{q}(x) \quad (4.36)$$

mit den Konstanten  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_M)^T$  und dem Vektor der Schnappschüsse  $\mathbf{q}(x) = (q_1(x), \dots, q_M(x))^T$ . Es folgt also das bemerkenswerte Ergebnis, daß die empirischen Eigenfunktionen des Integraloperators mit dem Kern  $\hat{G}_M(x_1, x_2)$  Linearkombinationen der Schnappschüsse der Bewegung sind.

Zurück zur Berechnung der empirischen Eigenfunktionen, also der Lösung der Gleichung

$$\int_0^L G(x_1, x_2) y(x_2) dx_2 = \lambda y(x_1). \quad (4.37)$$

Substituiert man hier die empirische räumliche Kovarianzfunktion und Gleichung (4.36), ergibt sich

$$\int_0^L \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M q_n(x_1) q_n(x_2) \sum_{m=1}^M \beta_m q_m(x_2) dx_2 = \lambda \sum_{n=1}^M \beta_n q_n(x_1) \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M q_n(x_1) \sum_{m=1}^M \beta_m \int_0^L q_n(x_2) q_m(x_2) dx_2 = \lambda \sum_{n=1}^M \beta_n q_n(x_1). \quad (4.39)$$

Das kann auch geschrieben werden als

$$(\mathbf{B}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{q}(x) = \lambda \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{q}(x), \quad (4.40)$$

wobei die Elemente der Matrix  $\mathbf{B}$  definiert sind als

$$B_{ij} = \frac{1}{M} \int_0^L q_i(x) q_j(x) dx. \quad (4.41)$$

Aufgrund der Annahme, daß die Schnappschüsse linear unabhängig sind, ist die Matrix  $\mathbf{B}$  positiv definit. Somit folgt aus

$$(\mathbf{B}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{q}(x) = \lambda \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{q}(x), \quad (4.42)$$

daß auch

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \lambda \boldsymbol{\beta} \quad (4.43)$$

gilt. Also sind zur Bestimmung der empirischen Eigenvektoren gemäß Gl. (4.36) die Eigenvektoren der Gleichung (4.43) zu bestimmen. Dies ist nur ein Eigenwert-Problem mit einer  $M \times M$  Matrix und weniger aufwendig zu berechnen als das ursprüngliche Problem mit einer  $d \times d$  Matrix, wenn die Anzahl  $M$  der Schnappschüsse geringer ist als die Dimension  $d$  des Konfigurationsvektors.



## 5 Fehlerschätzung und Adaptivität

Im folgenden soll ein Verfahren vorgestellt werden, mit dem die Fehler ermittelt werden können, welche durch die einzelnen Diskretisierungsschritte der partiellen Differentialgleichung entstehen, also aufgrund von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung sowie der Modellreduktion. Ein Überblick über verschiedene Fehlerschätzer für Finite Elemente ist in AINSWORTH und ODEN [1] sowie VERFÜHRTH [199] und den darin enthaltenen Literaturstellen zu finden. Im folgenden soll ein Ansatz zur *a posteriori* Fehlerschätzung vorgestellt werden, der in neuerer Zeit zur adaptiven Netz-Verfeinerung mit großem Erfolg eingesetzt wird, die „dual-weighted-residual“ (DWR) Methode.

### 5.1 Die dual-weighted-residual Methode

Die DWR-Methode ist auf alle Aufgabenstellungen anwendbar, die in Variationsformulierung geschrieben werden können. Der Ansatz der DWR-Methode basiert auf der Verwendung der Lösung des dualen bzw. adjungierten Problems. Bei der Berechnung der Parameter-Sensitivität, zum Beispiel zur Optimierung des Designs einer Struktur, wird die Lösung des adjungierten Problems seit längerem mit Erfolg eingesetzt [11, 94, 106]. Aber auch für die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers partieller Differentialgleichungen in Raum und Zeit sowie zur adaptiven Netzverfeinerung kann die adjungierte Methode verwendet werden. Die Tatsache, daß dieselbe adjungierte Lösung sowohl bei optimalem Design als auch bei der numerischen Fehleranalyse eine wichtige Rolle spielt, ist einfach zu erklären: Bei der Design-Optimierung ist man interessiert an der Perturbation eines Zielfunktional durch Änderungen von Geometrie oder Materialeigenschaften, bei der Fehleranalyse betrachtet man die Perturbation eines Zielfunktional durch den numerischen Approximationsfehler.

Aufbauend auf den Arbeiten von JOHNSON [97] sowie ERIKSSON et al. [50] haben RANNACHER et al. [157, 14, 13, 5, 156, 15] die „dual-weighted-residual method“ entwickelt und zur adaptiven Netzverfeinerung bei einer Vielzahl von Problemen verwendet. Weiterhin wird dieser Ansatz zur Fehlerkontrolle und adaptiven Schrittweitensteuerung bei der Zeitintegration von Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen eingesetzt [52, 126, 125]. Außerdem kann die duale Lösung zur nachträglichen Verbesserung eines Funktional der Lösung verwendet werden [182, 69, 151]. Im folgenden wird die

DWR-Methode zur Abschätzung des Fehlers eines Funktional der Lösung anhand eines einfachen Beispiels aus der linearen Algebra vorgestellt. Daran anschließend erfolgt die Formulierung in abstrakter Schreibweise für allgemeine Variationsgleichungen. Die gewählte Darstellung orientiert sich an RANNACHER [156], zur Einführung in die Theorie der adjungierten Methode siehe KLEIBER [106] und MARCHUK [129]. Am Ende dieses Kapitels wird die DWR-Methode auf die Abschätzung des Fehlers durch Modellreduktion und Zeitintegration angewendet. Es zeigt sich, daß hieraus ein Fehlerindikator zur Auswahl geeigneter Basisvektoren für die Modellreduktion entwickelt werden kann, um ein bestimmtes Funktional der Lösung sehr effizient mit hoher Genauigkeit zu approximieren.

## 5.2 Approximation eines linearen Modellproblems

Zur Einführung in das Konzept der DWR-Methode soll ihre Anwendung auf ein einfaches Beispiel aus der linearen Algebra gemäß [156] beschrieben werden: Das lineare System, welches zu lösen ist, wird gegeben durch

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (5.1)$$

$\hat{\mathbf{A}}$  und  $\hat{\mathbf{b}}$  bezeichnen eine Approximation von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  des Systems (5.1), so daß  $\hat{\mathbf{x}}$  der Gleichung

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}} \quad (5.2)$$

genügt. Die Aufgabe besteht nun darin, eine Beziehung zwischen einfach zu berechnenden Residuum  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ , das man erhält, wenn man die approximierte Lösung  $\hat{\mathbf{x}}$  in das Ausgangsproblem (5.1) einsetzt, und dem unbekannten Fehler  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  zu finden. Diese Beziehung ist notwendig, da ein kleines Residuum nicht automatisch bedeutet, daß auch der Fehler klein ist. Der einfachste Ansatz besteht darin, die Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \boldsymbol{\rho} \quad (5.3)$$

für  $\mathbf{e}$  zu lösen. Hier soll jedoch ein anderer Weg gezeigt werden, die Beziehung zwischen Residuum und Fehler zu berechnen. Er beruht auf der Erkenntnis, daß im Bereich der Ingenieurwissenschaften meist nicht die gesamte Lösung von Interesse ist, sondern nur ein bestimmtes Funktional der Lösung. Beispiele hierfür sind der Auftriebs- und Widerstandsbeiwert eines umströmten Körpers sowie die Spannungen oder Bewegungen an einer bestimmten Stelle einer Struktur. Mathematisch ausgedrückt interessiert man sich nicht für die gesamte Lösung, sondern nur für ein Funktional  $J(\mathbf{x})$  dieser Lösung. Die Berechnung liefert jedoch  $J(\hat{\mathbf{x}})$ , welches gegenüber  $J(\mathbf{x})$  einen Fehler aufweist. Im einfachsten Fall ist  $J$  linear und kann als

$$J(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{x} \quad (5.4)$$

geschrieben werden. Hierbei definiert  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$  das Funktional, welches aufgrund der Approximation den folgenden Fehler aufweist,

$$J(\mathbf{x}) - J(\hat{\mathbf{x}}) = J(\mathbf{e}) = \langle \mathbf{e}, \mathbf{p} \rangle. \quad (5.5)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet das für den Raum passende Skalarprodukt,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ . Um den Fehler bei der Berechnung des Funktionals zu bestimmen, verwendet man die Lösung des dualen oder adjungierten Problems

$$\mathbf{A}^* \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p} \quad (5.6)$$

mit  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$ . Der duale Operator  $\mathbf{A}^*$  ist definiert über die Lagrange-Identität

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle. \quad (5.7)$$

Hieraus folgt

$$J(\mathbf{e}) = \langle \mathbf{e}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{A}^* \boldsymbol{\lambda} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda} \rangle. \quad (5.8)$$

Damit erhält man eine *a posteriori* Fehlerschranke

$$|J(\mathbf{e})| \leq \sum_{i=1}^d |\rho_i| |\lambda_i| \quad (5.9)$$

mit dem lokalen Residuum  $\rho_i$ , welches mit der lokalen dualen Lösung  $\lambda_i$  gewichtet wird. Die adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda}$  kann man auf zwei Arten interpretieren, zum einen als den Einfluß des lokalen Residuums des Ausgangsproblems auf den globalen Fehler des zu berechnenden Funktionals, zum anderen als Wert des Zielfunktional, der der zugehörigen Greenschen Funktion entspricht: Definiert man  $\mathbf{1}^{(i)}$  als einen Vektor, der überall Null ist bis auf die  $i$ -te Stelle, die gleich Eins ist, wird die  $i$ -te Spalte von  $\mathbf{A}^{-1}$  gegeben durch die Lösung  $\mathbf{x}^{(i)}$  von

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{1}^{(i)} \quad (5.10)$$

und ist das diskrete Äquivalent zur Greenschen Funktion. Wertet man das Zielfunktional aus, folgt

$$J(\mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{p}^T \mathbf{x}^{(i)} = (\mathbf{A}^* \boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{x}^{(i)} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1}^{(i)} = \lambda_i. \quad (5.11)$$

Also ist die  $i$ -te Komponente der adjungierten Lösung gleich dem Wert des Zielfunktional, wenn die Lösung  $\mathbf{x}^{(i)}$  gleich der  $i$ -ten Greenschen Funktion ist.

### 5.3 Anwendung auf allgemeine Variationsprobleme

Der beschriebene Ansatz zur Fehlerschätzung mittels Residuum und der Lösung des dualen Problems kann auf generelle nichtlineare Probleme in Variationsformulierung erweitert werden. Im folgenden wird das zugrundeliegende Konzept in abstrakter funktionalanalytischer Schreibweise dargestellt, siehe auch JOHNSON [97], ERIKSSON et al.

[50] und RANNACHER [156]. Sei  $\mathcal{V}$  ein Hilbert-Raum mit dem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und der korrespondierenden Norm  $\| \cdot \|$ ,  $A(\cdot ; \cdot)$  eine stetige semi-lineare Form und  $F(\cdot)$  eine stetige lineare Form, definiert in  $\mathcal{V}$ . Hierbei gelte die Konvention, daß  $A(\cdot ; \cdot)$  linear in den Variablen ist, die rechts des Semikolons stehen. Gesucht ist die Lösung  $q \in \mathcal{V}$  der abstrakten Variationsgleichung

$$A(q; \delta\varphi) = F(\delta\varphi) \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{V}. \quad (5.12)$$

Die Gleichung wird approximiert durch die Galerkin-Methode unter Verwendung eines endlich-dimensionalen Unterraums  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ : Finde  $q_h \in \mathcal{V}_h$ , so daß

$$A(q_h; \delta\varphi_h) = F(\delta\varphi_h) \quad \forall \delta\varphi_h \in \mathcal{V}_h. \quad (5.13)$$

Die Approximation erfüllt die Galerkin-Orthogonalitätsbeziehung, welche beim vorliegenden Problem gegeben wird durch

$$A(q; \delta\varphi_h) - A(q_h; \delta\varphi_h) = 0 \quad \forall \delta\varphi_h \in \mathcal{V}_h. \quad (5.14)$$

Hieraus folgt die Beziehung

$$A(q; \delta\varphi_h) - A(q_h; \delta\varphi_h) = \int_0^1 A'(sq + (1-s)q_h; q - q_h, \delta\varphi_h) ds. \quad (5.15)$$

Darin bezeichnet  $A'(q; \cdot, \cdot)$  die Ableitung von  $A(\cdot ; \cdot)$  nach der ersten Variable, die am Punkt  $q$  ausgewertet wird. Das führt zur Einführung der folgenden Bilinearform

$$L(q, q_h; \delta\varphi, \delta\psi) := \int_0^1 A'(sq + (1-s)q_h; \delta\varphi, \delta\psi) ds, \quad (5.16)$$

die sowohl von der Lösung  $q$  als auch von  $q_h$  abhängt. Mit dem Fehler  $e = q - q_h$  ergibt sich

$$\begin{aligned} L(q, q_h; e, \delta\varphi_h) &= \int_0^1 A'(sq + (1-s)q_h; e, \delta\varphi_h) ds \\ &= A(q; \delta\varphi_h) - A(q_h; \delta\varphi_h) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

für ein beliebiges  $\delta\varphi_h \in \mathcal{V}_h$ . Um den Fehler eines nichtlinearen Funktionals  $J(q) - J(q_h)$  zu approximieren, bestimmt man die Taylor-Entwicklung des Funktionals,

$$J(q) - J(q_h) = \left. \frac{\partial J}{\partial q} \right|_{q_h} (q - q_h) + O(\|q - q_h\|^2), \quad (5.18)$$

und vernachlässigt die Terme höherer Ordnung. Weiterhin benötigt man die Lösung  $\lambda \in V$  des dualen Problems

$$L(q, q_h; \delta\varphi, \lambda) = \hat{J}(\delta\varphi) \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{V} \quad \text{mit} \quad \hat{J} = \left. \frac{\partial J}{\partial q} \right|_{q_h}. \quad (5.19)$$



Unter der Annahme, daß dieses duale Problem lösbar ist und unter Verwendung der Orthogonalitätsbeziehung (5.14) erhält man für den Fehler im Funktional

$$J(q) - J(q_h) \approx L(q, q_h; e, \lambda) = F(\lambda) - A(q_h; \lambda). \quad (5.20)$$

Da die Bilinearform  $L(q, q_h; \cdot, \cdot)$  die unbekannte exakte Lösung in ihren Koeffizienten enthält und auch die unbekannte exakte Lösung  $\lambda$  des dualen Problems in der obigen Gleichung auftaucht, sind Approximationen notwendig, um (5.20) berechnen zu können. Für die Approximation der Bilinearform besteht der einfachste Ansatz darin,  $q$  durch  $q_h$  zu ersetzen. Daraus folgt das duale Problem zur Bestimmung einer Approximation  $\hat{\lambda}$  von  $\lambda$

$$L(q_h, q_h; \delta\varphi, \hat{\lambda}) = \hat{J}(\delta\varphi) \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{V}. \quad (5.21)$$

Die Abschätzung der Auswirkung dieser Approximation auf die Genauigkeit des Fehlerschätzers ist schwierig und hängt vom untersuchten Problem ab. Laut Aussage von RANNACHER [156] hat sich bei verschiedenen Anwendungen einschließlich der Navier-Stokes Gleichungen jedoch gezeigt, daß diese Näherung für die adaptive Netzverfeinerung gute Ergebnisse liefert, solange die Lösung des Ausgangsproblems stabil ist. Wichtiger ist eine gute Approximation der dualen Lösung  $\hat{\lambda}$  durch die Lösung eines diskretisierten dualen Problems

$$L(q_h, q_h; \delta\varphi_h, \hat{\lambda}_h) = \hat{J}(\delta\varphi_h) \quad \forall \delta\varphi_h \in V_h. \quad (5.22)$$

Die exakte Lösung  $\hat{\lambda}$  kann auf verschiedene Weisen approximiert werden:

- Berechnung der dualen Lösung auf einer feineren Diskretisierung oder
- Interpolation der diskreten Lösung  $\hat{\lambda}_h$  durch Polynome höherer Ordnung auf Element-Patches.

Die erste Möglichkeit ist im Kontext der Finiten Elemente aufwendig und wird laut RANNACHER [156] selten verwendet, da man für die Lösung des dualen Problems nicht mehr Rechenzeit aufwenden möchte als für die Lösung des Ausgangsproblems. Deshalb sei, wie auch numerische Beispiele zeigten, die zweite Möglichkeit für die adaptive Netzverfeinerung geeigneter. Für die Auswertung des Fehlerschätzers muß die Gleichung

$$J(q) - J(q_h) \approx F(\lambda) - A(q_h; \lambda) \quad (5.23)$$

auf Elementebene ausgewertet werden. Ist für ein bestimmtes Element der geschätzte Fehler groß, wird es im Raum oder in der Zeit verfeinert [199].

## 5.4 Modellreduktions- und Zeitdiskretisierungsfehler

Im folgenden soll der Fehler analysiert werden, der durch die projektionsbasierte Modellreduktion entsteht, um Aussagen über die Genauigkeit des reduzierten Modells machen

zu können. Für lineare Probleme sind hierzu in der Literatur einige Arbeiten zu finden: KLINE [107] untersucht den Modellreduktionsfehler bei linearen Systemen, die mit einer Kombination aus modaler und Lanczos-Basis approximiert werden. Das Ergebnis ist, daß der Fehler aus zwei Anteilen besteht: Ein Teil wird hervorgerufen durch den Fehler bei der Darstellung der äußeren Last durch die reduzierte Basis, der zweite Teil entsteht durch die Unfähigkeit der reduzierten Basis, die exakte Eigenschwingungsantwort des vollen Modells wiederzugeben. JOO, WILSON und LEGER [100] schlagen auf einer Analyse des Modellreduktionsfehlers basierende Kriterien für die Dimension der Lanczos-Basis vor und zeigen ebenfalls, daß die Lastkomponenten, die orthogonal zur Basis stehen, relevant für die Höhe des Fehlers sind. CABOS [26] berechnet a-posteriori Fehlerschranken für lineare Schwingungsprobleme, die im Krylov-Unterraum berechnet werden. Dabei wird zum einen eine Schranke für die Norm des unbekannten Fehlers und zum anderen eine Schranke für den Fehler eines linearen Funktionals der Lösung hergeleitet.

Für nichtlineare Probleme gestaltet sich die Fehlerabschätzung schwieriger. FINK und RHEINBOLDT [55, 54] geben eine Abschätzung des Fehlers bei der Reduktion nichtlinearer statischer Probleme an und zeigen, daß der Fehler mit zunehmender Dimension der reduzierten Basis abnimmt. UTKU et al. [196] geben Abschätzungen für den Modellreduktionsfehler für allgemeine nichtlineare Systeme 1. Ordnung, indem sie die Fehlerfortpflanzung bei Verwendung des expliziten Euler-Algorithmus zur Zeitdiskretisierung untersuchen. Ergebnis ist eine Approximation des Fehlers zu jedem Zeitschritt, die jedoch die unbekannte Lösung des nicht reduzierten Problems enthält.

Im folgenden soll eine Abschätzung des Modellreduktionsfehlers mit Hilfe der dualen Methode hergeleitet werden. Diese beinhaltet sowohl den durch die Projektion auf den niedrig-dimensionalen Ansatzraum hervorgerufenen Fehler als auch den Anteil, der durch die zeitliche Diskretisierung hervorgerufen wird. Dabei findet die  $cG(1)$  Methode zur zeitlichen Diskretisierung Verwendung, die, wie in Abschnitt 3.2.2 gezeigt, unter bestimmten Bedingungen mit der Newmark-Methode übereinstimmt. Die Darstellung orientiert sich an JOHNSON [98], der den Zeitdiskretisierungsfehler bei nichtlinearen, nicht reduzierten Differentialgleichungssystemen untersucht. Man beginnt mit dem durch die räumliche Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen entstandenen System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, \quad 0 < t \leq T, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Durch die Modellreduktion mit dem Ansatz  $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_m = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}$  ergibt sich das reduzierte Problem mit der Normierung der Basisvektoren gemäß  $\mathbf{Y}_m^T \mathbf{Y}_m = \mathbf{I}$  zu

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Y}_m^T \mathbf{g}(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t) &= \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{g}_m(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\xi}(0) &= \mathbf{Y}_m^T \mathbf{x}(0).\end{aligned}\tag{5.25}$$

Das System wird mittels des  $cG(1)$  Verfahrens in der Zeit diskretisiert. Im folgenden werden die Bezeichnungen gemäß Abschnitt 3.2.2 verwendet. Gesucht wird die Approximation  $\xi_k$  von  $\xi$ , die stetig und abschnittsweise linear ist und der Gleichung

$$\int_{I_n} [\dot{\xi}_k + g_m(\xi_k, t)] dt = 0 \quad (5.26)$$

für jedes Zeitintervall  $I_n$ ,  $n = 1 \dots N$  genügt. Um diese Gleichung vollständig diskret schreiben zu können, muß eine Quadraturformel für das Integral von  $g_m$  ausgewählt werden. Mit der Trapezregel ergibt sich die für jedes Zeitintervall zu lösende Gleichung

$$\xi_{k,n} - \xi_{k,n-1} + \frac{\Delta t_n}{2} [g_m(\xi_{k,n-1}, t_{n-1}) + g_m(\xi_{k,n}, t_n)] = 0 \quad (5.27)$$

mit  $\xi_{k,0} = \xi(0)$ . Mit der approximierten Lösung  $x_{m,k} = Y_m \xi_k$  lautet der Ausdruck für das Residuum

$$\rho(t) = - [Y_m \dot{\xi}_k + g(Y_m \xi_k, t)]. \quad (5.28)$$

Sei nun  $\lambda$  die Lösung der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda} + [A(t)]^T \lambda &= p, \quad T > t \geq 0 \\ \lambda(T) &= 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

für ein lineares Funktional der Form  $J(x) = \int_0^T \langle p, x \rangle dt$ . Das Vorgehen bei nichtlinearen Funktionalen ist im vorigen Abschnitt beschrieben.  $A(t)$  bezeichne dabei die Jakobi-Matrix

$$A(t) = \int_0^1 \frac{\partial g(sx + (1-s)Y_m \xi_k)}{\partial x} ds. \quad (5.30)$$

Hiermit ergibt sich der im vorigen Abschnitt aufgeführte Zusammenhang

$$A(t) [x - x_{m,k}] = g(x, t) - g(x_{m,k}, t), \quad (5.31)$$

der zur Abschätzung des Fehlers benötigt wird. Der Fehler des Funktionals lautet

$$J(x) - J(x_{m,k}) = \int_0^T \langle p, x - x_{m,k} \rangle dt \quad (5.32)$$

$$= \int_0^T \langle -\dot{\lambda} + [A(t)]^T \lambda, x - x_{m,k} \rangle dt \quad (5.33)$$

$$= \int_0^T \langle \rho, \lambda \rangle dt + \langle \lambda(0), x(0) - x_{m,k}(0) \rangle \quad (5.34)$$

$$= \sum_{n=1}^N \int_{I_n} \langle \rho, \lambda \rangle dt + \langle \lambda(0), x(0) - x_{m,k}(0) \rangle \quad (5.35)$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^d \int_{I_n} \rho_j \lambda_j dt + \langle \boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_{m,k}(0) \rangle \quad (5.36)$$

$$\leq \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^d \sup_{t \in I_n} |\rho_j| \int_{I_n} \lambda_j dt + \langle \boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_{m,k}(0) \rangle. \quad (5.37)$$

Man erkennt die Anteile aufgrund von Modellreduktion und Zeitdiskretisierung sowie den Anteil aufgrund der Approximation des Anfangswerts. Als Approximation der zur Abschätzung des Fehlers benötigten exakten Lösung des dualen Problems  $\boldsymbol{\lambda}$  kann wie im vorigen Abschnitt beschrieben entweder eine Berechnung mit geringerer Zeitschrittweite oder eine Interpolation mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung auf Zeitintervall-Patches verwendet werden. Bei sehr großen Systemen wird man auch das duale Problem in einem niedrig-dimensionalen Unterraum approximieren, analog zum Vorgehen der Modellreduktion beim Ausgangsproblem.

## 5.5 Auswahl geeigneter Basisvektoren

Eine weitere Einsatzmöglichkeit der Approximation des Fehlers ist die Auswahl von für die Approximation des gewählten Funktionals geeigneten Basisvektoren. Ausgehend von

$$J(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{m,k}) = \int_0^T \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda} \rangle dt + \langle \boldsymbol{\lambda}(0), \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_{m,k}(0) \rangle \quad (5.38)$$

kann man diese Gleichung auch komponentenweise schreiben als

$$J(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{m,k}) = \sum_{i=1}^d j_i, \quad (5.39)$$

wobei der Vektor  $\boldsymbol{j} = (j_1, \dots, j_d)^T$  definiert ist als

$$\boldsymbol{j} = \int_0^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\rho} dt + \boldsymbol{\Lambda}(0)[\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_{m,k}(0)] \quad (5.40)$$

mit der Matrix  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$ . Durch die Darstellung von  $\boldsymbol{j}$  im Unterraum  $\mathcal{V}_m$  ergibt sich

$$\boldsymbol{Y}_m^T \boldsymbol{j} = \int_0^T \boldsymbol{Y}_m^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\rho} dt + \boldsymbol{Y}_m^T \boldsymbol{\Lambda}(0)[\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_{m,k}(0)], \quad (5.41)$$

dessen Komponenten einen Indikator für den Fehler in Richtung des jeweiligen Basisvektors darstellen. Dieses Vorgehen ist analog zur adaptiven Netzverfeinerung zu sehen, wo der Fehler auf Element-Ebene ausgewertet wird. Hier entsprechen die Basisvektoren

den Elementen: Ist die Fehlerkomponente groß, sollte der Basisvektor in der reduzierten Basis verbleiben, andernfalls kann der betrachtete Basisvektor aus der reduzierten Basis entfernt werden. Man kann also aus einer größeren Anzahl von möglichen Basisvektoren diejenigen automatisch selektieren, die für die Berechnung des betrachteten Funktional die größte Bedeutung haben, also die größte Genauigkeit bei der Approximation des Funktional liefern.



## 6 Verbesserung der Approximationsgüte

Es sind mehrere Verfahren entwickelt worden, um niedrig-dimensionale Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu konstruieren, welche die Langzeit-Dynamik, also das asymptotische Verhalten des unendlich-dimensionalen Ausgangsproblems reproduzieren. Das bekannteste dieser Verfahren stellt das im Kapitel 4 beschriebene Galerkin-Verfahren zur Modellreduktion dar. Es ignoriert die kleinräumige Struktur der Lösung und konzentriert sich auf die großräumigen Strukturen. Die Ausgangsgleichung wird auf einen linearen, also ebenen Unterraum projiziert, deshalb wird dieses Verfahren auch als „flat Galerkin method“ oder ebene Galerkin Methode bezeichnet.

Es ist jedoch bekannt, daß sich die Lösungen einiger dissipativer nichtlinearer partieller Differentialgleichungen nach einer gewissen „Einschwingzeit“ auf einem globalen Attraktor endlicher Dimension befinden [191]. In diesem Fall bleibt die Lösung zwar zeitabhängig, konvergiert aber zu einer bestimmten Menge im Phasenraum, dem Attraktor. Es gibt Ansätze, den Attraktor numerisch zu approximieren, um das Langzeitverhalten des Systems effizient zu beschreiben. Versuche in diese Richtung basieren auf der Theorie der inertialen Mannigfaltigkeiten (IM), siehe z.B. [60, 191] für einen Überblick und weiterführende Literaturverweise, und haben zur Entwicklung der nichtlinearen Galerkin Methode geführt [130, 45, 115]. Dieses Verfahren zeigt bei bestimmten Problemen eine bessere Genauigkeit verglichen mit der traditionellen Galerkin Methode bei gleicher räumlicher Abbruchgrenze, erfordert jedoch einen höheren Rechenaufwand.

Vergleicht man die Genauigkeit der Lösungen der beiden Methoden, die man für eine vorgegebene Rechenleistung erhält, ist es oft nicht eindeutig, ob die Verwendung der nichtlinearen Galerkin Methode vorteilhaft ist. In diesem Zusammenhang wurde mit der „postprocessed“ Galerkin Methode von GARCÍA-ARCHILLA et al. [64] ein weiteres Verfahren entwickelt, bei dem die kleinräumigen Strukturen wie bei der linearen Galerkin Methode während der zeitlichen Entwicklung ignoriert werden. Ist jedoch ein Ausgabe-wert gewünscht, wird die berechnete Lösung im Nachhinein mit Hilfe der IM korrigiert, um die kleinräumigen Strukturen zurückzuerhalten. Diese Methode ist oft effizienter als die normale und die nichtlineare Galerkin Methode, wie in LAING et al. [114] für ein Anwendungsbeispiel aus der Strukturdynamik gezeigt wird. Sie ähnelt dem Verfahren

der statischen Korrektur [79, 89] für lineare Probleme der Strukturdynamik, in der englischsprachigen Literatur „static correction method“ genannt: Von den Ergebnissen der Modellreduktion bei linearen Problemen ist bekannt, daß das reduzierte Problem zwar die Dynamik des Systems mit guter Approximationsgüte wiedergeben mag, daß aber die abgeleiteten Größen wie innere Kräfte und Momente durch das reduzierte System schlechter approximiert werden [105]. Man geht von den linearen Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext}(t) \quad (6.1)$$

aus und berechnet die modale Basis. Die Eigenformen des Systems trennt man in zwei Gruppen, säulenweise zusammengefaßt in den Matrizen  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{Z}$ . Hierbei stellt man die langwelligen Eigenformen bzw. diejenigen, deren Eigenfrequenz in der Nähe der Anregungsfrequenz der externen Kraft liegen, in die Matrix  $\mathbf{Y}$  und alle übrigen in die Matrix  $\mathbf{Z}$ , so daß

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta} \quad (6.2)$$

gilt. Durch Einsetzen und Multiplizieren mit  $\mathbf{Y}^T$  und  $\mathbf{Z}^T$  von links zerfällt aufgrund der Orthogonalität der Eigenvektoren in  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{Z}$  bezüglich  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  das System in zwei Teilsysteme,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{Y}^T \mathbf{f}_{ext}(t), \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{M} \mathbf{Z} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Z}^T \mathbf{K} \mathbf{Z} \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{Z}^T \mathbf{f}_{ext}(t). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Sämtliche Matrizen haben dabei Diagonalgestalt. Nur das erste System wird in der Zeit diskretisiert, beim zweiten System argumentiert man, daß die kurzwelligen Eigenformen der Anregung quasi-statisch folgen, also die Zeitableitung  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$  vernachlässigt werden kann. Gemäß [89] erhält man eine approximierte Lösung durch

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_{ext}(t) + \mathbf{Y} [\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y}) \mathbf{Y}^T \mathbf{f}_{ext}(t)], \quad (6.4)$$

in der das dynamische Verhalten der in  $\mathbf{Y}$  enthaltenen Eigenformen und das quasi-statische Verhalten *aller* Eigenformen enthalten ist. Die nichtlineare Galerkin-Methode kann vereinfacht als Erweiterung dieses Verfahrens auf nichtlineare Probleme angesehen werden. Bevor diese Methode beschrieben wird, soll der Begriff der invarianten Mannigfaltigkeit und die Theorie der zentralen Mannigfaltigkeit vorgestellt werden, da diese die Grundlage für die nichtlineare und postprocessed Galerkin Methode darstellen. Eine detailliertere Einführung in die Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme findet man in WIGGINS [202], GUCKENHEIMER und HOLMES [75] und TEMAM [191].

## 6.1 Invariante Mannigfaltigkeiten

Invariante Mannigfaltigkeiten, besonders die stabilen, instabilen und zentralen Mannigfaltigkeiten, spielen eine wichtige Rolle bei der Analyse dynamischer Systeme. Zur



Beschreibung der stabilen, instabilen und zentralen Mannigfaltigkeit dient folgendes System: Sei  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^d$  ein Fixpunkt von

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (6.5)$$

Dann muß zur Durchführung von lokalen Stabilitätsuntersuchungen das lineare System

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_*}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_* \quad (6.6)$$

betrachtet werden. Die Lösung des linearen Systems mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$  wird gegeben durch

$$\mathbf{w}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{w}_0. \quad (6.7)$$

Die Eigenräume des Flusses der Bewegung werden durch die Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$  aufgespannt. Betrachtet man die Bewegung zum Beispiel im euklidischen Raum  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , kann man diesen Raum abhängig von den Eigenwerten der Matrix  $\mathbf{A}$  in die folgenden Unterräume zerlegen:

$$\mathbb{R}^d = \mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^u \times \mathcal{E}^c. \quad (6.8)$$

Hierbei bezeichnet

- $\mathcal{E}^s$  den durch zu den Eigenwerten mit negativem Realteil gehörenden Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  aufgespannten Raum (stabile Mannigfaltigkeit) der Dimension  $d_s$ ,
- $\mathcal{E}^u$  den durch zu den Eigenwerten mit positivem Realteil gehörenden Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  aufgespannten Raum (instabile Mannigfaltigkeit) der Dimension  $d_u$  und
- $\mathcal{E}^c$  den durch zu den Eigenwerten mit verschwindendem Realteil gehörenden Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  aufgespannten Raum (zentrale Mannigfaltigkeit) der Dimension  $d_c$ .

Es gilt  $d = d_s + d_u + d_c$ .  $\mathcal{E}^s$ ,  $\mathcal{E}^u$  und  $\mathcal{E}^c$  sind die *invarianten Unterräume* des dynamischen Systems, da Lösungen von (6.6), deren Anfangsbedingungen vollständig in einem dieser Unterräume liegen, für alle Zeiten in jenem Unterraum bleiben. Auch bei nichtlinearen Systemen wie (6.5) können entsprechende invariante Mannigfaltigkeiten eines Fixpunktes definiert werden. Sie sind nichtlineare Unterräume, die lokal auf  $\mathbb{R}^d$  abgebildet werden können. Es existieren auch im nichtlinearen Fall sowohl stabile als auch instabile und zentrale Mannigfaltigkeiten.

Das Ziel der Analyse des Systems (6.6) bestand ja darin, etwas über die Lösungen in der Nähe des Gleichgewichtspunktes des nichtlinearen Systems (6.5) zu erfahren, unter Verwendung der stabilen, instabilen und zentralen Mannigfaltigkeiten: Zuerst führt man die Translation  $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_*$  durch und daran anschließend eine Taylor-Entwicklung um  $\mathbf{x}_*$ . Dann folgt aus Gl. (6.5) die Normalform genannte Gleichung

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{w}), \quad (6.9)$$

wobei  $\mathbf{h}(\mathbf{w}) = O(\|\mathbf{w}\|^2)$  gilt. Führt man eine lineare Transformation der Jakobi-Matrix auf Block-Diagonalform durch, ist

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_s \\ \mathbf{w}_u \\ \mathbf{w}_c \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

wobei  $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{w} \equiv (\mathbf{w}_s^T, \mathbf{w}_u^T, \mathbf{w}_c^T)^T \in \mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u} \times \mathbb{R}^{d_c}$  die Transformation definiert. Hier ist  $\mathbf{A}_s$  eine  $d_s \times d_s$  Matrix mit Eigenwerten mit negativen Realteilen,  $\mathbf{A}_u$  eine  $d_u \times d_u$  Matrix, deren Eigenwerte positive Realteile haben und  $\mathbf{A}_c$  eine  $d_c \times d_c$  Matrix, deren Eigenwerte Realteile gleich Null haben. Unter Verwendung der linearen Transformation folgt das als Normalform bezeichnete System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{w}_s + \mathbf{h}_s(\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_u, \mathbf{w}_c), \\ \dot{\mathbf{w}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{w}_u + \mathbf{h}_u(\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_u, \mathbf{w}_c), \\ \dot{\mathbf{w}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{w}_c + \mathbf{h}_c(\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_u, \mathbf{w}_c), \end{aligned} \quad (6.11)$$

worin  $\mathbf{h}_s$  ( $\mathbf{h}_u$ ,  $\mathbf{h}_c$ ) die ersten  $d_s$  ( $d_u$ ,  $d_c$ ) Komponenten des Vektors  $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{w})$  bezeichnen.

## 6.2 Die zentrale Mannigfaltigkeit

Ist die instabile Mannigfaltigkeit leer, wird jede Trajektorie, die sich in  $\mathcal{E}^s$  befindet, exponentiell von der zentralen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{E}^c$  „angezogen“. Also reicht zur Analyse des Langzeitverhaltens eines dynamischen Systems die Betrachtung des Systems restringiert auf die zentrale Mannigfaltigkeit aus. Das Haupt-Anwendungsgebiet der Theorie der zentralen Mannigfaltigkeit, die zum Beispiel bei CARR [30] und den darin zitierten Literaturstellen beschrieben wird, ist die Analyse von Bifurkationen dynamischer Systeme. Aber unter bestimmten Bedingungen kann damit auch die Dimension des betrachteten Systems reduziert werden. Man betrachtet dazu das System in Normalform

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{w}_s + \mathbf{h}_s(\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_c) \\ \dot{\mathbf{w}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{w}_c + \mathbf{h}_c(\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_c), \quad (\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_c) \in \mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_c}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei  $\mathbf{h}_s$  und  $\mathbf{h}_c$  sowie deren Ableitungen am Ursprung Null sein sollen. Bei CARR [30] findet sich der Beweis, daß dann das System (6.12) eine lokale zentrale Mannigfaltigkeit der Form

$$\mathbf{w}_s = \Phi(\mathbf{w}_c) \quad \text{für} \quad \|\mathbf{w}_s\| < \epsilon \quad (6.13)$$

besitzt. Geometrisch betrachtet ist das eine Hyperfläche im Raum  $\mathcal{E}^c \times \mathcal{E}^s$ , beschrieben durch die Funktion  $\Phi(\mathbf{w}_c) = \mathbf{w}_s$ . Das Reduktionsprinzip der Theorie der zentralen Mannigfaltigkeit besagt, daß die asymptotische Dynamik des Ausgangssystems auf die zentrale Mannigfaltigkeit beschränkt ist, also gilt

$$\dot{\mathbf{w}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{w}_c + \mathbf{h}_c(\mathbf{w}_c, \Phi(\mathbf{w}_c)), \quad \mathbf{w}_c \in \mathbb{R}^{d_c}. \quad (6.14)$$

Ein Beweis findet sich in [30]. Dieses System hat nur noch die Dimension  $d_c$  und beschreibt das Langzeitverhalten des Systems (6.12). Die Theorie der zentralen Mannigfaltigkeit kann auch auf nicht-autonome Systeme und partielle Differentialgleichungen angewendet werden. Eine detaillierte Beschreibung des Vorgehens zur Berechnung von  $\Phi$  sowie verschiedene Beispiele finden sich in [30].

### 6.3 Inertiale Mannigfaltigkeiten und nichtlineare Galerkin-Methoden

Inertiale Mannigfaltigkeiten sind das globale Analogon der im vorigen Abschnitt beschriebenen zentralen Mannigfaltigkeit für dissipative Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen oder dissipative partielle Differentialgleichungen [37]. Eine Menge  $\mathcal{M}$  ist eine inertielle Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

1.  $\mathcal{M}$  ist endlich-dimensional,
2.  $\mathcal{M}$  ist invariant,
3.  $\mathcal{M}$  zieht alle Lösungen des betrachteten Systems mit exponentieller Rate an.

FOIAS et al. [60] definieren eine inertielle Mannigfaltigkeit vom physikalischen Standpunkt aus als eine endlich-dimensionale Beziehung zwischen den Eigenformen niedriger und hoher Frequenz. Für einige partielle Differentialgleichungen kann die Existenz einer inertialen Mannigfaltigkeit gezeigt werden, siehe z.B. [58, 171]. Für viele praxisrelevante Systeme wie zum Beispiel die Navier-Stokes Gleichungen im  $\mathbb{R}^3$  ist dies bisher nicht gelungen.

Bei solchen Systemen wird die Existenz einer approximativen inertialen Mannigfaltigkeit (AIM) postuliert [59, 58, 193], welche das Verhalten der hohen Eigenformen annähert durch das Verhalten der niedrigen Eigenformen beschreibt. Das ist eine flexible und nicht so restriktive Idee: Sie besteht darin, glatte, endlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten zu suchen, die den Attraktor des Systems annähern. Folgen von AIMs mit zunehmender Genauigkeit sind zum Beispiel in [44] konstruiert worden.

Auf dem Konzept der AIM basiert die nichtlineare Galerkin Methode zur Berechnung der Langzeitdynamik dissipativer Systeme. Der unendlich-dimensionale Phasenraum der betrachteten partiellen Differentialgleichung wird aufgeteilt in zwei Unterräume, einen endlich-dimensionalen Unterraum, aufgespannt von den langsam kontrahierenden, also schwach gedämpften Eigenformen niedriger Frequenz und das unendlich-dimensionale Komplement. Es wird weiterhin angenommen, daß die Dynamik im unendlich-dimensionalen Raum durch eine approximative inertielle Mannigfaltigkeit mit der Dynamik im endlich-dimensionalen Raum verbunden ist, so daß man also den Einfluß der kleinräumigen Strukturen auf die zeitliche Entwicklung der großräumigen Strukturen hierdurch mit

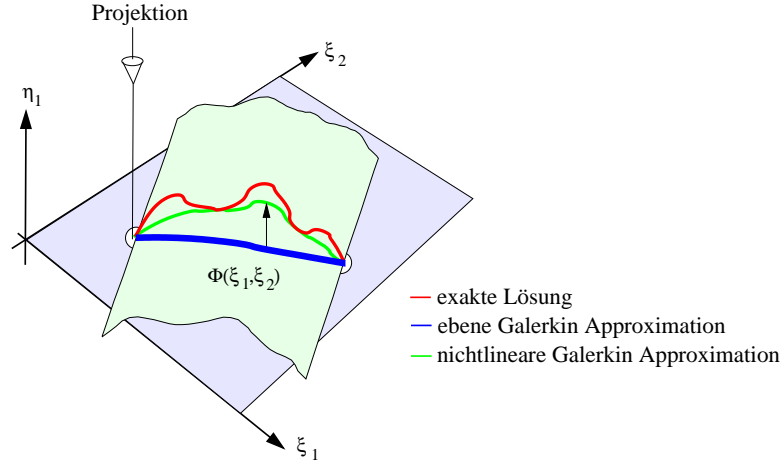


Abbildung 6.1 Geometrische Deutung der normalen und nichtlinearen Galerkin Methode im  $\mathbb{R}^3$ .

einbeziehen kann. Eine geometrische Veranschaulichung des Ansatzes der nichtlinearen Galerkin Methode ist in Abb. 6.1 dargestellt.

Im folgenden wird die nichtlineare und postprocessed Galerkin Methode statt am Beispiel einer partiellen Differentialgleichung, für die diese Methoden ursprünglich entwickelt wurden, an einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben, das durch die räumliche Diskretisierung entstanden ist. Ausgehend von der Form

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (6.15)$$

mit  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  als linearem und  $\mathbf{h}$  als nichtlinearem Anteil berechnet man die Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_j = \lambda_j \mathbf{y}_j. \quad (6.16)$$

Diese ordnet man in geeigneter Weise in der Matrix  $\mathbf{Y}_m$ , so daß man den  $m$ -dimensionalen Unterraum  $\mathcal{Y}_m = \text{span}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$  definieren kann, welcher durch die ersten  $m$  Eigenvektoren aufgespannt wird. In der Matrix  $\mathbf{Z}_{d-m}$  werden die restlichen  $d - m$  Eigenvektoren gesammelt, die den Komplementärraum  $\mathcal{Z}_{d-m} = \text{span}\{\mathbf{y}_{m+1}, \dots, \mathbf{y}_d\}$  zum Unterraum  $\mathcal{Y}_m$  aufspannen. Weiterhin seien die Eigenvektoren so normiert, daß  $\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i = 1$  gelte. Die folgende Gleichung stellt aufgrund von  $\mathbb{R}^d = \mathcal{Y}_m \times \mathcal{Z}_{d-m}$  keine Approximation, sondern nur eine Transformation von  $\mathbf{x}$  in eine andere Basis dar:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}_{d-m} \boldsymbol{\eta}. \quad (6.17)$$

Substituiert man (6.17) in Gleichung (6.15) und projiziert durch Multiplikation mit  $\mathbf{Y}_m^T$  und  $\mathbf{Z}_{d-m}^T$  von links auf die beiden gegenseitig orthogonalen Unterräume  $\mathcal{Y}_m$  und  $\mathcal{Z}_{d-m}$ ,

erhält man zwei gekoppelte Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen,

$$\dot{\xi} + Y_m^T A Y_m \xi + Y_m^T h(Y_m \xi + Z_{d-m} \eta, t) = 0, \quad (6.18)$$

$$\dot{\eta} + Z_{d-m}^T A Z_{d-m} \eta + Z_{d-m}^T h(Y_m \xi + Z_{d-m} \eta, t) = 0. \quad (6.19)$$

Die normale Galerkin Methode setzt nun in der Gleichung (6.18)  $\eta = 0$  und integriert das resultierende endlich-dimensionale System

$$\dot{\xi} + Y_m^T A Y_m \xi + Y_m^T h(Y_m \xi, t) = 0. \quad (6.20)$$

Die wahre Lösung von (6.15) wird approximiert durch  $x \approx Y_m \xi$ .

Unter der Voraussetzung, daß der Attraktor der Gleichung (6.15) durch eine geringe Anzahl von Freiheitsgraden beschrieben werden kann, ist es sinnvoll anzunehmen, daß für einen bestimmten Wert von  $m$  und die richtige Trennung der Basisvektoren in  $Y_m$  und  $Z_{d-m}$  eine Beziehung zwischen  $\xi$  und  $\eta$  existiert, so daß auf dem Attraktor

$$\eta = \Phi(\xi) \quad (6.21)$$

gilt. Physikalisch veranschaulicht bedeutet dies, daß auf dem Attraktor das Verhalten sämtlicher hoher Eigenformen durch das Verhalten der niedrigen  $m$  Eigenformen bestimmt wird. In der Synergetik, siehe HAKEN [77], bezeichnet man diese Eigenschaft des Systems auch als Versklavungsprinzip. Man erhält durch die Substitution von Gleichung (6.21) in die Gleichung (6.18) und Integration des entstehenden  $m$ -dimensionalen Systems

$$\dot{\xi} + Y_m^T A Y_m \xi + Y_m^T h(Y_m \xi + Z_{d-m} \Phi(\xi), t) = 0 \quad (6.22)$$

die Rekonstruktion der Lösung  $x = Y_m \xi + Z_{d-m} \Phi(\xi)$  ohne Approximationsfehler. Da für viele Systeme von Differentialgleichungen die Existenz einer inertialen Mannigfaltigkeit bisher nicht gezeigt werden konnte, postuliert man statt dessen die Existenz einer approximativen inertialen Mannigfaltigkeit  $\Phi_{app}$ . Sie soll das Verhalten der hohen Eigenformen durch das Verhalten der niedrigen Eigenformen annähern. Es wird dann die Gleichung

$$\dot{\xi} + Y_m^T A Y_m \xi + Y_m^T h(Y_m \xi + Z_{d-m} \Phi_{app}(\xi), t) = 0 \quad (6.23)$$

integriert und die Lösung als  $x \approx Y_m \xi + Z_{d-m} \Phi_{app}(\xi)$  approximiert. Diese Approximation wird die Dynamik auf dem Attraktor nicht exakt wiedergeben, aber die Annahme ist nicht unbegründet, daß diese Lösung besser ist als die der traditionellen Galerkin Methode. Jedoch ist  $\Phi_{app}$  im allgemeinen recht aufwendig zu berechnen, und die Frage nach der Effizienz der Lösung der Gleichung (6.23) im Vergleich zur Lösung einer traditionellen Galerkin-Projektion mit  $\hat{m} > m$  Eigenformen muß untersucht werden.

Hier setzt die Arbeit von GARCÍA-ARCHILLA et al. [64] mit der postprocessed Galerkin Methode an: Es wird gezeigt, daß es oft möglich ist, die Genauigkeit des Systems, gegeben durch Gl. (6.23), zu erzielen mit einem Aufwand, der der Integration einer

$m$ -dimensionalen Galerkin-Projektion entspricht. Die Idee besteht darin, die Galerkin-Projektion Gl. (6.20) zu integrieren und nur dann, wenn Ausgabewerte berechnet werden sollen, z.B. zum Zeitpunkt  $t_n$ , die Lösung auf die approximierte inertielle Mannigfaltigkeit „zu heben“:

$$\mathbf{x}(t_n) \approx \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}(t_n) + \mathbf{Z}_{d-m} \boldsymbol{\Phi}_{app}(\boldsymbol{\xi}(t_n)). \quad (6.24)$$

Dieser Weg zeigt auch bei Problemen der Strukturmechanik Erfolg. Es konnte zum Beispiel von LAING et al. [114] am Beispiel einer schwingenden Schalenstruktur gezeigt werden, daß die postprocessed Galerkin Methode in vielen Fällen eine ähnliche Genauigkeit aufweist wie die Lösung der Gleichung (6.23), jedoch mit einem stark verringerten Rechenaufwand.

## 6.4 Approximierte inertielle Mannigfaltigkeiten

Zum Abschluß muß noch die Frage beantwortet werden, wie eine approximierte inertielle Mannigfaltigkeit  $\boldsymbol{\Phi}_{app}$  berechnet werden kann. Eine Übersicht hierzu findet man in RUSSEL et al. [163]. Ausgehend von Gl. 6.19 versucht man, eine Näherung für die gewünschte Beziehung  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}_{app}(\boldsymbol{\xi})$  zu finden. Somit muß die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Z}_{d-m}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_{d-m} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Z}_{d-m}^T \mathbf{h}(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}_{d-m} \boldsymbol{\eta}, t) = \mathbf{0} \quad (6.25)$$

in der Zeit diskretisiert werden. Hierfür können zum Beispiel einfache Verfahren niedriger Ordnung verwendet werden. Die sogenannte Euler-Galerkin AIM [58] verwendet das implizite Euler-Verfahren zur zeitlichen Diskretisierung. Mit der Zeitschrittweite  $\tau$  und der Anfangsbedingung  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  ergibt sich nach einer Fixpunkt-Iteration zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems die Beziehung

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}_{app}(\boldsymbol{\xi}) = -\tau (\mathbf{I} + \tau \mathbf{Z}_{d-m}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_{d-m})^{-1} \mathbf{Z}_{d-m}^T \mathbf{h}(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t). \quad (6.26)$$

Die Frage, wie groß  $\tau$  gewählt werden sollte, ist schwierig zu beantworten. Mit einem kleinen Wert erzielt man eine höhere Genauigkeit, aber nur dann, wenn  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  einen guten Startwert darstellt. Die Wahl von  $\tau \approx 1/\lambda_{m+1}$ , also proportional dem Kehrwert des ersten vernachlässigten Eigenwerts, wird in [58] wie folgt motiviert: Der Abstand der  $\boldsymbol{\eta}$ -Komponenten der Trajektorien, die nicht auf der inertialen Mannigfaltigkeit starten, verringert sich mit einer Rate proportional zu  $\exp(-\lambda_{m+1}t/2)$ , wenn  $t \rightarrow \infty$ . Aufgrund dessen gewährleistet die Verwendung von  $\tau \approx 1/\lambda_{m+1}$  die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration.

Eine andere Herangehensweise wird in der Arbeit von TITI [193] vorgestellt und kann als quasi-statischer Ansatz bezeichnet werden, analog zu der in der Einleitung dieses Kapitels beschriebenen Methode der statischen Korrektur bei linearen Problemen. Mit der Annahme, daß die Zeitableitung  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  vernachlässigbar ist, wird eine quasi-stationäre

AIM berechnet. Die Variablen  $\boldsymbol{\eta}$  folgen den Variablen  $\boldsymbol{\xi}$  somit ohne Trägheitseffekte. Es ist also die algebraische Gleichung

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) := \mathbf{Z}_{d-m}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}_{d-m} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Z}_{d-m}^T \mathbf{h}(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}_{d-m} \boldsymbol{\eta}, t) = \mathbf{0} \quad (6.27)$$

zu lösen. Man ersetzt das System (6.18,6.19) von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch ein System von differential-algebraischen Gleichungen (6.18,6.27). Oft wird das algebraische System mittels Fixpunkt-Iteration und ein bis zwei Iterationsschritten gelöst. Alternativ kann man auch das Newton-Raphson Verfahren verwenden. Da jedoch der Rechenaufwand zur Ermittlung von  $\boldsymbol{\Phi}_{app}$  so gering wie möglich sein sollte, wird bei Anwendungen der Fixpunkt-Iteration der Vorzug gegeben [114]. Bei der Wahl des Startwerts der Iteration kann entweder  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  oder der Wert von  $\boldsymbol{\eta}$  aus dem letzten Zeitschritt gewählt werden.





## 7 Numerische Beispiele

Um die Anwendung der in den vorigen Kapiteln beschriebenen Verfahren zur Verbesserung der Effizienz der Langzeitsimulation von Windkraftanlagen zu demonstrieren, wird in diesem Kapitel zunächst exemplarisch ein einzelnes Rotorblatt betrachtet, bestehend aus strukturellem und aerodynamischem Teilsystem. Das Rotorblatt wird mit den zu Beginn der Arbeit beschriebenen Balkenelementen modelliert, die aerodynamischen Lasten werden mit dem im Anhang beschriebenen Dynamic Stall Modell berechnet. Die Effizienz sei für die folgenden Untersuchungen definiert als Quotient von erzielter Approximationsgüte, verglichen mit dem nicht-reduzierten Modell, und dem dazu benötigten Rechenaufwand. Somit muß neben der Verringerung des Rechenaufwands durch die Modellreduktion die mit den verschiedenen Verfahren erzielbare Approximationsgüte untersucht werden.

Nach einer kurzen Beschreibung der Aufgabenstellung wird die Berechnung der modalen, Lanczos und Karhunen-Loève Basis beschrieben und die mit diesen Basen bei Anwendung der normalen, „ebenen“ Galerkin-Methode erzielte Approximationsgüte analysiert. Dabei wird sowohl der Fehler bei den Primärvariablen wie Verschiebungen der Struktur, Primärfehler genannt, als auch der Fehler bei abgeleiteten Größen wie Biegemomenten im Rotorblatt, Sekundärfehler genannt, betrachtet. Die Karhunen-Loève Basis zeigt dabei sowohl bei Primär- als auch Sekundärfehler eine sehr hohe Approximationsgüte, da ihre Basisvektoren sowohl Nichtlinearitäten als auch das aeroelastische Verhalten des Modells berücksichtigen. Lanczos- und modale Basis zeigen beim Primärfehler ungefähr gleiches Verhalten. Beim Sekundärfehler ist die Approximationsgüte der Lanczos-Basis im Vergleich zur modalen Basis besser. Nachteilig bei der Lanczos-Basis ist die Stagnation der Fehlerwerte bei Zunahme der Dimension  $m$  der Basis. Dies tritt auch bei mit anderen Startvektoren generierten Lanczos-Basen auf.

Bei aerodynamischen Systemen ist die Verwendung der projektionsbasierten Modellreduktion, anders als bei Problemen der Strukturmechanik, noch nicht so weit verbreitet. Es gibt erste Ansätze, auch bei Problemen der Fluidmechanik reduzierte Modelle zu erstellen, siehe zum Beispiel [161, 73, 57, 31, 47] und die darin zitierten Literaturstellen. Somit erscheint auch die Reduktion des Dynamic Stall Modells möglich. Hierbei hat sich gezeigt, daß die Karhunen-Loève Basis gute Ergebnisse liefert. Die modale Basis, die

mittels der Linearisierung des aeroelastischen Modells berechnet wird, zeigt keine zufriedenstellende Approximationsgüte bei der Reduktion des aerodynamischen Modells.

Eine Möglichkeit zur Steigerung der Effizienz basiert auf der Tatsache, daß oftmals nur ein gewisses Funktional der Lösung wie Verschiebungen oder Spannungen an einem bestimmten Punkt des Rotorblatts von Interesse ist. Wie im Abschnitt 5.5 beschrieben kann mittels der Approximation des durch die Reduktion des Systems hervorgerufenen Funktionalfehlers durch die DWR-Methode ein Fehlerindikator für die verwendeten Basisvektoren berechnet werden. Hohe Werte des Fehlerindikators bedeuten hohe Relevanz des betreffenden Basisvektors für die Approximation des Funktional. Verkleinert man die Basis durch Vernachlässigung derjenigen Vektoren mit geringen Indikatorwerten, erhält man eine effiziente niedrigdimensionale Basis, abgestimmt auf das zu berechnende Funktional.

Ein weiteres Verfahren zur Verbesserung der Lösung des reduzierten Modells trägt der Erkenntnis Rechnung, daß zwar die Primärvariablen mit zufriedenstellender Genauigkeit durch den reduzierten Ansatz wiedergegeben werden, daß dies aber für abgeleitete Größen wie zum Beispiel Biegemomente nicht der Fall ist. Aus diesem Grund wird bei linearen Problemen die Methode der statischen Korrektur eingesetzt [89]. Bei nichtlinearen Systemen leistet das die postprocessed Galerkin-Methode [64], die in Kapitel 6 beschrieben ist. Der Einsatz der nichtlinearen Galerkin Methode ist bei Verwendung von impliziter Zeitintegration nicht zu empfehlen, da durch das Einbringen von hochfrequenten Basisvektoren in das System die Konvergenz der Newton-Raphson Iteration vermindert oder sogar verhindert wird. Die Verringerung der Zeitschrittweite behebt dieses Problem, ist jedoch für die Langzeitsimulation der Windturbine nicht wünschenswert.

Daran anschließend wird die gesamte Windturbine simuliert und die Modellreduktion auf Substrukturebene angewendet. Auch hier zeigt sich eine hohe Approximationsgüte der Karhunen-Loève Basis und die Verbesserung der abgeleiteten Größen wie Biegemomente durch die Verwendung der postprocessed Galerkin Methode.

Abschließend wird die Effizienz der Verfahren analysiert. Dazu muß nicht nur die erzielte Approximationsgüte, sondern auch der dazu benötigte Rechenaufwand betrachtet werden. Analysiert man den Aufwand der Generierung der Basisvektoren, so zeigt sich, daß der hohe Aufwand zur Berechnung der Karhunen-Loève Vektoren zu Beginn der Zeitintegration die Effizienz dieser Basis im Vergleich zur Lanczos-Basis vermindert, daß jedoch schon nach kurzer Integrationszeit die mit der KL Basis erzielbare Approximationsgüte diesen Nachteil aufwiegt. Weiterhin werden die Kosten pro Zeitschritt des unreduzierten mit dem reduzierten Problem am Beispiel des Newmark-Algorithmus verglichen. Dabei zeigt sich für steigende Dimension  $d$  des Ausgangsproblems eine zunehmende Effizienzsteigerung durch Anwendung der Modellreduktion, wie auch bei [109] und [160] festgestellt wurde.

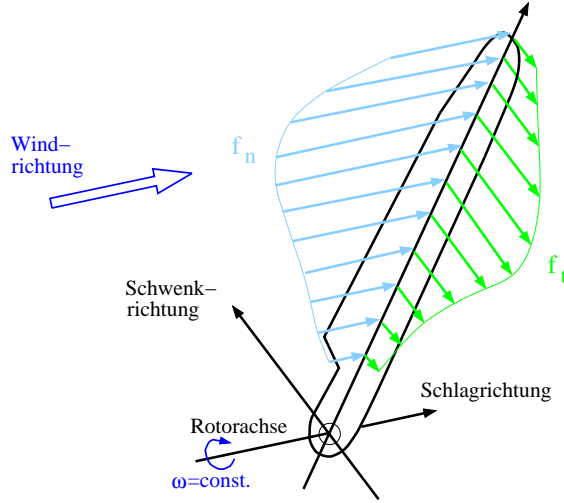


Abbildung 7.1 Rotorblatt in turbulentem Wind.

## 7.1 Berechnung des dynamischen Verhaltens eines Rotorblatts

Das Rotorblatt, dessen Antwortverhalten bei vorgegebener, konstanter Drehbewegung in turbulentem Wind berechnet werden soll, ist schematisch in Abb. 7.1 dargestellt. Die verwendeten Daten für Abmessungen und Material entsprechen denen eines typischen Rotorblatts. Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}, t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}(0) &= \mathbf{d}_0, \quad \dot{\mathbf{d}}(0) = \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{d} &\in \mathbb{R}^d, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (7.1)$$

mit

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{kin}(\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) + \mathbf{f}_{in}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}_{ext}(\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}, t). \quad (7.2)$$

Hier steht  $\mathbf{f}_{kin} = \mathbf{M}(\mathbf{d})\ddot{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{f}}_{kin}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d})$  für den Vektor der Inertialkräfte, wobei  $\mathbf{M}(\mathbf{d})$  die von der Konfiguration abhängige Massenmatrix darstellt.  $\mathbf{f}_{in}$  bezeichnet den Vektor der inneren Kräfte und  $\mathbf{f}_{ext}$  den Vektor der äußeren Anregung, also Gewichtskräfte und aerodynamische Lasten.

Für die folgende Analyse werden die Bewegungsgleichungen formuliert als

$$\mathbf{M}(\mathbf{d})\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_0\mathbf{d} + \mathbf{h}(\ddot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}, t) = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

mit  $\mathbf{K}_0 = \frac{\partial \mathbf{f}_{in}(\mathbf{d}_0)}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_{kin}(\mathbf{v}_0, \mathbf{d}_0)}{\partial \mathbf{d}}$  und  $\mathbf{h} = \hat{\mathbf{f}}_{kin} + \mathbf{f}_{in} - \mathbf{K}_0\mathbf{d} - \mathbf{f}_{ext}$ .

Tabelle 7.1 Belastungen der Rotorblätter nach HAU [81].

Stationäre Belastungen:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• mittlere, über die Höhe konstante Windgeschwindigkeit</li> <li>• Fliehkraft bei konstanter Drehzahl</li> </ul>
Drehzahlperiodische Belastungen:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Höhenprofil des Windes</li> <li>• Turmvorstau</li> <li>• Schräganströmung</li> <li>• Gewichtskraft</li> <li>• Kreisel- und Corioliskraft</li> </ul>
Weitere instationäre Belastungen:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Windturbulenz</li> </ul>

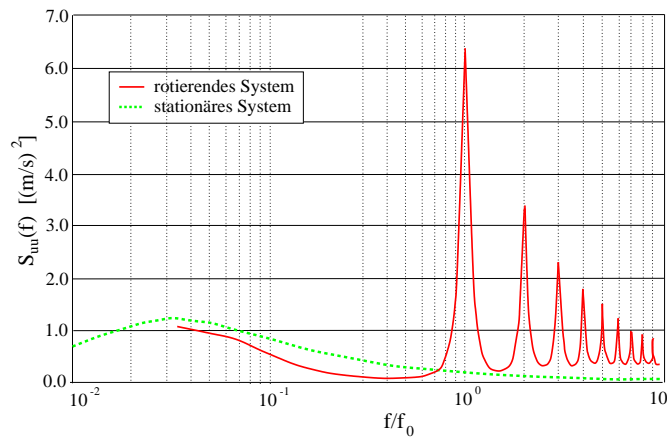


Abbildung 7.2 Leistungsspektrum nach VON KÁRMÁN im rotierenden und nicht-rotierenden System, aus [204].

### 7.1.1 Anregung des Rotorblatts

Die Belastungen des Rotorblatts sind in Tabelle 7.1 dargestellt. Der Frequenzgehalt der instationären Anregungen wird dominiert durch die Drehfrequenz des Rotorblatts, für das Modellproblem gilt  $f_0 = 0.4$  Hz. Weiterhin ist der Frequenzgehalt des Windes relevant für die Untersuchung des Rotorblatts: Er wird meist mit dem VON KÁRMÁN Spektrum modelliert [131], das breitbandig ist mit einem Maximum bei niedrigen Frequenzen von ca.  $2 \cdot 10^{-2}$  Hz. Zu beachten ist jedoch der sogenannte „Rotational-Sampling“ Effekt, welcher durch die Rotation des Rotorblatts im Windfeld hervorgerufen wird [35, 36]. Dieser Effekt zeigt sich in einer Erhöhung des vom Rotorblatt „wahrgenommenen“ Leistungsspektrums bei Vielfachen der Rotationsfrequenz, wie man in Abb. 7.2 deutlich erkennt.

Tabelle 7.2 Frequenz und Bewegungsform der unteren modalen Basisvektoren.

Frequenz [Hz]	Art
1.9	Schlagform
2.4	Schwenkform
6.1	Schlagform
9.7	Schwenkform
11.2	Torsionsform
13.4	Schlagform
20.8	Torsionsform
22.5	Schwenkform
23.9	Schlagform
31.6	Torsionsform

### 7.1.2 Berechnung der Basisvektoren

Zuerst muß die räumliche Diskretisierung des Rotorblatts durchgeführt werden. Um die Geometrie und die Materialeigenschaften des Modells möglichst gut zu erfassen, verwendet man eine feine Diskretisierung. Der durch die Freiheitsgrade des so entstandenen detailreichen FE-Modells aufgespannte Raum ist dann jedoch sehr groß und nicht gut dazu geeignet, die die Strukturantwort dominierenden großräumigen Deformationsfiguren effizient darzustellen. Aus diesem Grund wird durch die Modellreduktion vom durch die Freiheitsgrade des FE-Modells aufgespannten Raum zum durch wenige Basisvektoren aufgespannten niedrig-dimensionalen Raum gewechselt. Im folgenden wird das Vorgehen zur Berechnung der Basisvektoren für die modale, die Lanczos und die Karhunen-Loève Basis beschrieben. Daran anschließend wird die Approximationsgüte dieser drei Basen verglichen, denn aufgrund der Verwendung nur einiger weniger Basisvektoren bei der Modellreduktion sind die Basen, die ja im Grenzfall  $m = d$  denselben FE-Ansatzraum aufspannen, unterschiedlich gut für die Modellreduktion geeignet.

#### (a) Modale Basis

Durch die Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$-\omega^2 \mathbf{M}(d_0) \mathbf{y} + \mathbf{K}_0 \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

erhält man die Eigenvektoren  $\mathbf{y}_j$  mit den Eigenfrequenzen  $\omega_j$ . Die modale Basis wird definiert durch

$$\mathbf{Y}_m = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}, \quad m \ll d. \quad (7.5)$$

Für die niedrigen Eigenfrequenzen  $\omega_j$  des Rotorblatts ergeben sich die in Tabelle 7.2 aufgeführten Werte. Vergleicht man die Frequenzen der Anregung mit diesen Eigenfre-

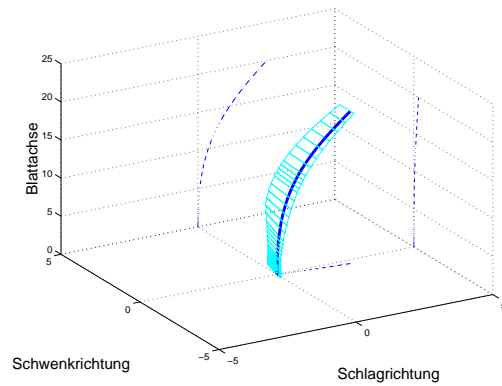


Abbildung 7.3 Eigenvektor 1 der modalen Basis.

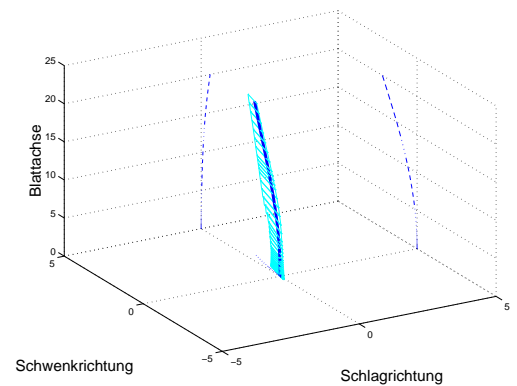


Abbildung 7.4 Eigenvektor 2 der modalen Basis.

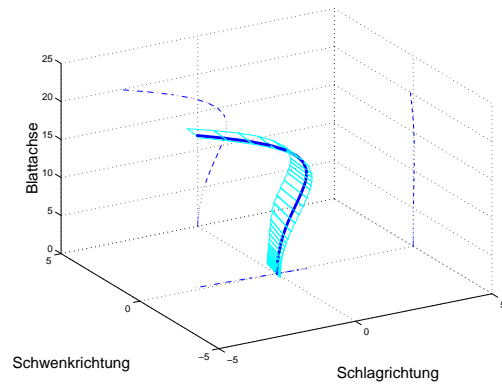


Abbildung 7.5 Eigenvektor 3 der modalen Basis.

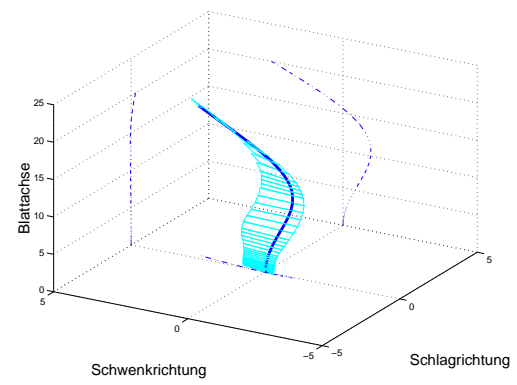


Abbildung 7.6 Eigenvektor 4 der modalen Basis.

quenzen, so zeigt sich, daß nur wenige Eigenformen angeregt werden und ein reduziertes Modell nur wenige Freiheitsgrade für eine ausreichende Approximationsgüte benötigen wird [65]. In den Abb. 7.3 bis 7.6 sind die ersten vier Eigenformen der modalen Basis dargestellt.

### (b) Berechnung der Lanczos Basis

Zur Berechnung der Lanczos Basis verwendet man in der Strukturdynamik meist die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}(\mathbf{d}_0)^{-1} \mathbf{M}(\mathbf{d}_0). \quad (7.6)$$

Als Startvektor kann die durch Aufbringen einer repräsentativen Last  $\mathbf{f}_{rep}$  erhaltene statische Verschiebungsfigur verwendet werden,

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}(\mathbf{d}_0)^{-1} \mathbf{f}_{rep}. \quad (7.7)$$

Für den Vektor  $\mathbf{f}_{rep}$  wird der Mittelwert der Lastvektoren  $\mathbf{f}_{ext}$  zu zehn verschiedenen Zeitpunkten gewählt, um sicherzustellen, daß alle relevanten Komponenten im Lastvektor vorhanden sind, da nicht durch  $\mathbf{f}_{rep}$  angeregte Verschiebungskomponenten durch die Lanczos Basis nicht repräsentiert werden. In den Abb. 7.7 bis 7.10 sind die ersten vier Vektoren der auf diese Weise berechneten Lanczos Basis dargestellt.

### (c) Karhunen-Loève Basis des Rotorblatts

Zur Berechnung der KL Basis muß das unreduzierte System über eine gewisse Zeitspanne simuliert und die so erhaltenen Schnappschüsse  $\mathbf{d}(t_n) = \mathbf{d}_n$  gespeichert werden. Es hat sich gezeigt, daß die in ein bis zwei Umdrehungen des Rotorblatts enthaltene Information ausreichend ist, um eine gute KL Basis zu berechnen. Es hat sich auch gezeigt, daß trotz der Tatsache, daß die Dynamik der Windturbine nicht ergodisch, sondern zyklisch ergodisch ist, die mittels der Methode von Sirovitch berechneten Basisvektoren eine gute Approximationsgüte liefern.

Mittels der Matrix  $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_M]$  erhält man die Matrix  $\mathbf{B}$  zu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{M} \mathbf{D}^T \mathbf{D}. \quad (7.8)$$

Mit den Eigenvektoren  $\boldsymbol{\beta}_j$  dieser Matrix,

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}_j = \lambda_j \boldsymbol{\beta}_j, \quad (7.9)$$

lassen sich wie beschrieben die Basisvektoren der KL Basis bestimmen,

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{D}\boldsymbol{\beta}_j. \quad (7.10)$$

Diese werden gemäß der Größe des zugehörigen Eigenwerts  $\lambda_j > \lambda_{j+1} \quad \forall j$  geordnet. In den Abb. 7.11 bis 7.14 sind die ersten vier Eigenformen der Karhunen-Loève Basis dargestellt.

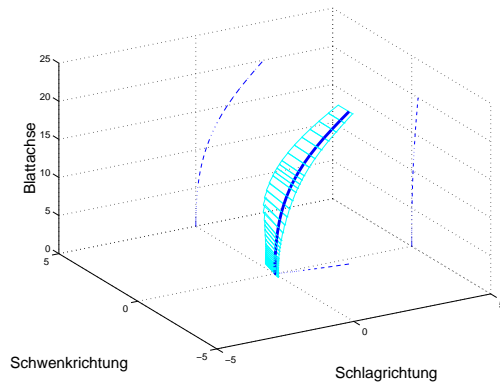


Abbildung 7.7 Eigenvektor 1 der Lanczos Basis.

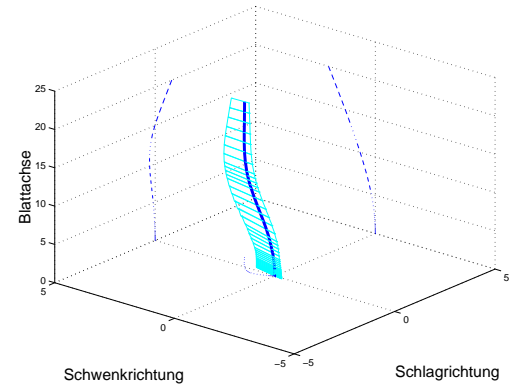


Abbildung 7.8 Eigenvektor 2 der Lanczos Basis.

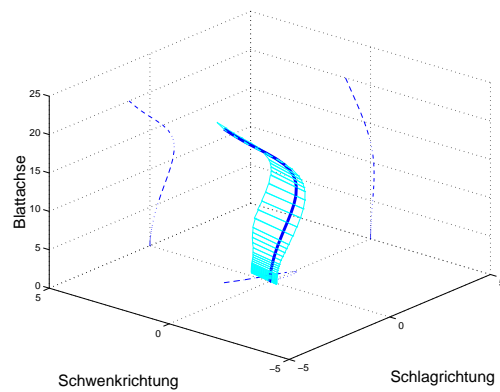


Abbildung 7.9 Eigenvektor 3 der Lanczos Basis.

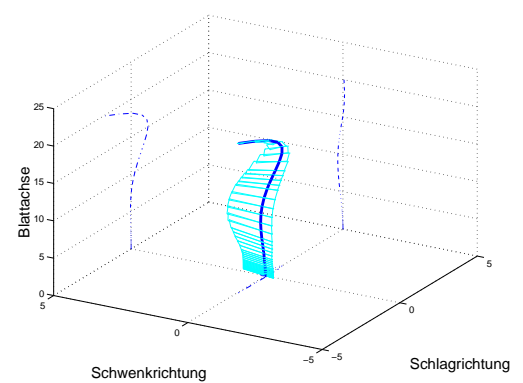


Abbildung 7.10 Eigenvektor 4 der Lanczos Basis.



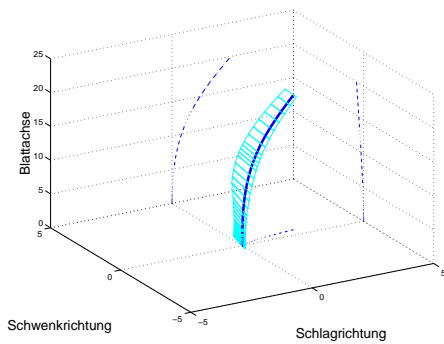


Abbildung 7.11 Eigenvektor 1 der KL Basis.

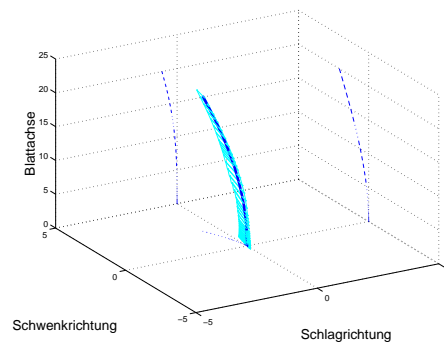


Abbildung 7.12 Eigenvektor 2 der KL Basis.

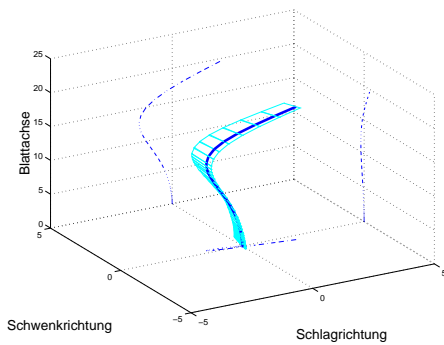


Abbildung 7.13 Eigenvektor 3 der KL Basis.

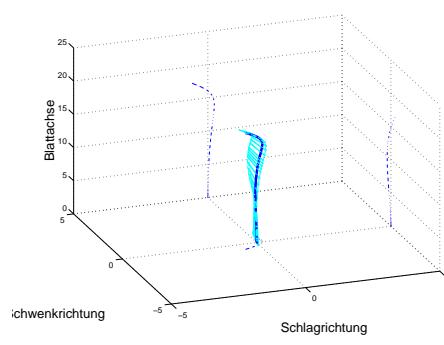


Abbildung 7.14 Eigenvektor 4 der KL Basis.

### Vergleich der Basisvektoren der modalen und KL Basis

In den Abb. 7.15 bis 7.18 sind beispielhaft die ersten vier Eigenvektoren der modalen und KL Basis überlagert dargestellt. Dabei sind die modalen Basisvektoren in blauer und die KL Basisvektoren in roter Farbe gezeichnet und es ist sowohl der positive als auch der negative jeweilige Basisvektor abgebildet. Man erkennt, daß die ersten drei Basisvektoren der modalen und KL-Basis sich sehr ähnlich sind, erst beim vierten Vektor sind deutliche Unterschiede zu erkennen. Trotzdem wird sich bei der folgenden Analyse der Approximationsgenauigkeit zeigen, daß die Verwendung der Karhunen-Loève Vektoren ein sehr viel besseres reduziertes Modell ergibt als die modale Basis.

Zur Erklärung können die erkennbaren Unterschiede der Basisvektoren einen Anhaltspunkt liefern. Bei der Berechnung der KL Basis werden im Unterschied zur modalen und Lanczos Basis die aeroelastischen Einflüsse vollständig berücksichtigt. Das kann man zum Beispiel beim Vergleich der zweiten Basisvektoren in Abb. 7.16 erkennen: Das Rotorblatt sollte sich bei einer Bewegung nach vorn in Windrichtung durch die aufgrund der Anströmung hervorgerufenen aerodynamischen Kräfte zusätzlich nach oben bewegen. Der KL Basisvektor zeigt dieses Verhalten, der modale Basisvektor nicht.

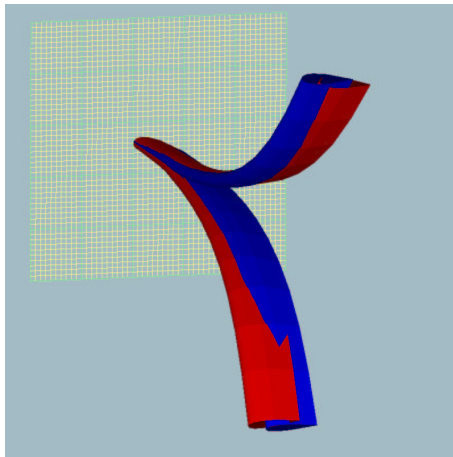


Abbildung 7.15 Eigenvektor 1 der modalen und KL Basis.

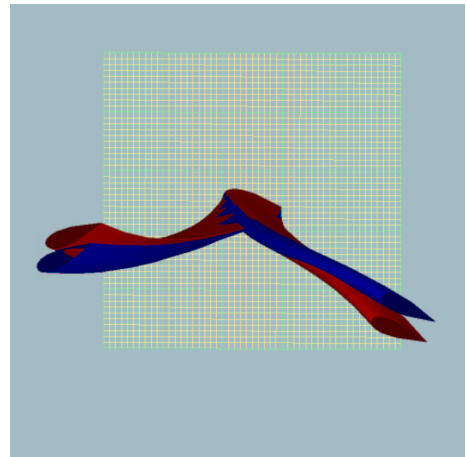


Abbildung 7.16 Eigenvektor 2 der modalen und KL Basis.

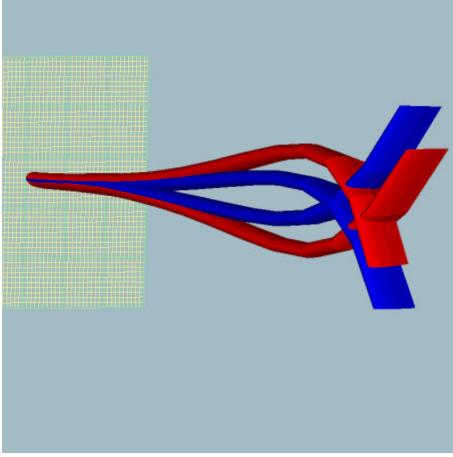


Abbildung 7.17 Eigenvektor 3 der modalen und KL Basis.

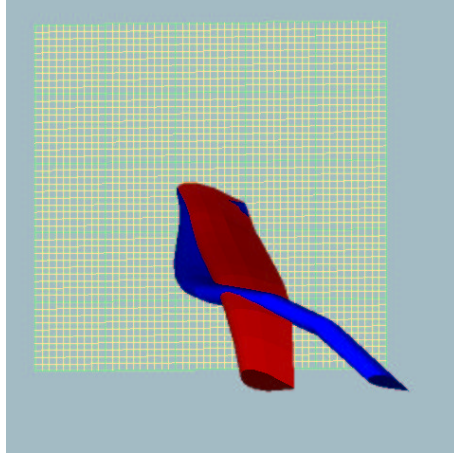


Abbildung 7.18 Eigenvektor 4 der modalen und KL Basis.

### 7.1.3 Durchführung und Ergebnisse der Reduktion

Setzt man den reduzierten Ansatz

$$\mathbf{d} \approx \mathbf{d}_m = \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j \xi_j = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi} \quad (7.11)$$

in die Bewegungsgleichungen des Rotorblatts ein und wählt als Testraum ebenfalls den durch die Vektoren  $\mathbf{y}_j$  aufgespannten Raum, erhält man die reduzierten Bewegungsgleichungen der Dimension  $m$  zu

$$\mathbf{Y}_m^T \mathbf{f}(\mathbf{Y}_m \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}_m \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0}. \quad (7.12)$$

Während der Zeitintegration des reduzierten Systems mit der Newmark-Methode muß statt der effektiven Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems nur die reduzierte Matrix

$$\mathbf{K}_{\text{eff,red}} = \mathbf{Y}_m^T \mathbf{K}_{\text{eff}} \mathbf{Y}_m \quad (7.13)$$

aufgebaut werden. Um nicht zuerst die gesamte Matrix  $\mathbf{K}_{\text{eff}}$  aufzubauen und diese dann durch zweimalige Matrixmultiplikation zu reduzieren, wird man schon die Element-Matrizen  $\mathbf{K}_{\text{eff}}^{(e)}$  mit den entsprechenden Anteilen der Matrix  $\mathbf{Y}_m$  multiplizieren und diese dann direkt zur reduzierten Matrix  $\mathbf{K}_{\text{eff,red}}$  assemblieren. Die zweite Änderung im Zeitintegrations-Algorithmus besteht in der Berechnung des reduzierten Residuums

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)} = \mathbf{Y}_m^T \boldsymbol{\rho}^{(i)}. \quad (7.14)$$

Somit ist das Verschiebungsinkrement der Iteration  $(i)$

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} = -\mathbf{Y}_m (\mathbf{K}_{\text{eff,red}})^{-1} \mathbf{Y}_m^T \boldsymbol{\rho}^{(i)}. \quad (7.15)$$

Zur Bewertung der Lösungen wird zum einen der relative Fehler der Verschiebungen betrachtet,

$$e_{u,m}(t) = \frac{\|\mathbf{u}_{\text{ref}} - \mathbf{u}_m\|}{\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|}. \quad (7.16)$$

Zum anderen wird der relative Fehler des Vektors der Biegemomente,

$$e_{mb,m}(t) = \frac{\|\mathbf{mb}_{\text{ref}} - \mathbf{mb}_m\|}{\|\mathbf{mb}_{\text{ref}}\|}, \quad (7.17)$$

abhängig von der Dimension  $m$  der Basis analysiert. Dabei werden die Referenzwerte  $\mathbf{u}_{\text{ref}}$  und  $\mathbf{mb}_{\text{ref}}$  mit allen Freiheitsgraden des Finite-Element-Modells berechnet. In Abb. 7.19 und 7.20 sind die Zeitverläufe der beiden Fehler für  $m = 10$  dargestellt. Die betrachtete Zeitspanne beträgt  $t \in [0, 80]$  Sekunden, die Schrittweite  $dt = 0.05$  Sekunden.

Der Vergleich der Zeitreihen ist aufgrund der stochastischen Natur der Eingangsgröße und damit auch der Ausgangsgröße des Systems schwierig durchzuführen. Aus diesem Grund sollen die Zeitreihen der relativen Fehler im folgenden durch ihre zeitlichen Mittelwerte

$$E\{e_{u,m}\} = \frac{1}{T} \int_0^T e_{u,m}(t) dt \quad \text{bzw.} \quad E\{e_{mb,m}\} = \frac{1}{T} \int_0^T e_{mb,m}(t) dt \quad (7.18)$$

charakterisiert und diese Werte verglichen werden. In Abb. 7.21 ist für modale Basis, Lanczos Basis und Karhunen-Loève Basis der Mittelwert des Verschiebungsfehlers über der Anzahl der verwendeten Basisvektoren dargestellt, in Abb. 7.22 für den Fehler der Biegemomente. Sowohl bei  $E\{e_u\}$  als auch bei  $E\{e_{mb}\}$  erkennt man ein gutes Approximationsverhalten der Karhunen-Loève Basis. Modale und Lanczos Basis starten bei  $E\{e_u\}$  auf demselben Niveau, die modale Basis zeigt mit zunehmender Anzahl von Basisvektoren eine bessere Approximationsgüte als die Lanczos Basis. Beim Fehler  $E\{e_{mb}\}$  jedoch zeigt die Lanczos Basis eine signifikant bessere Approximationsgüte als die modale Basis. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Lanczos-Vektoren die statische Verschiebung der Struktur aufgrund einer Last  $\mathbf{f}_{rep}$  im Gegensatz zu den Eigenschwingungsformen der modalen Basis exakt wiedergeben können und somit die inneren Kräfte und Momente besser approximieren.

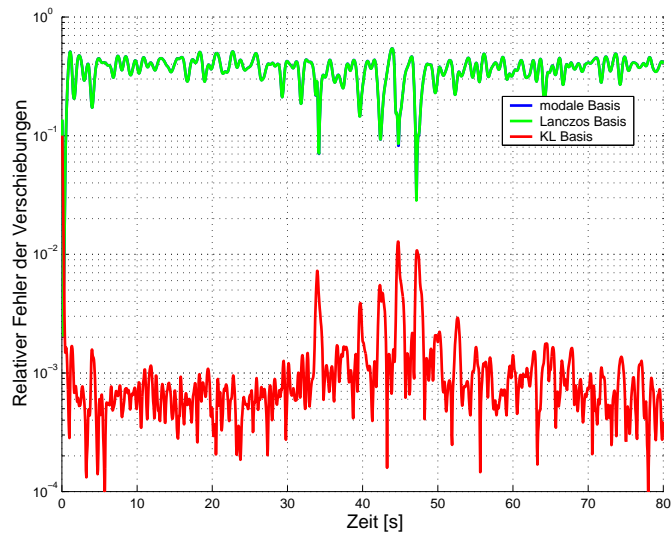


Abbildung 7.19 Zeitverläufe von  $e_{u,10}$  bei Verwendung von 10 Basisvektoren. Die Kurven der modalen und Lanczos Basis liegen aufeinander.

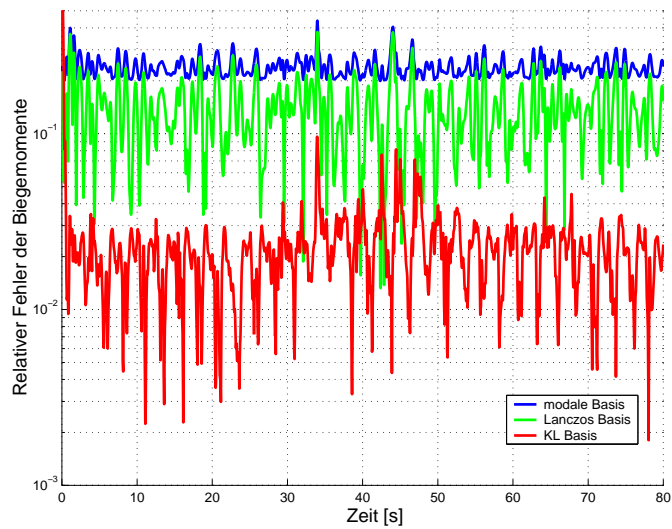


Abbildung 7.20 Zeitverläufe von  $e_{mb,10}$  bei Verwendung von 10 Basisvektoren.

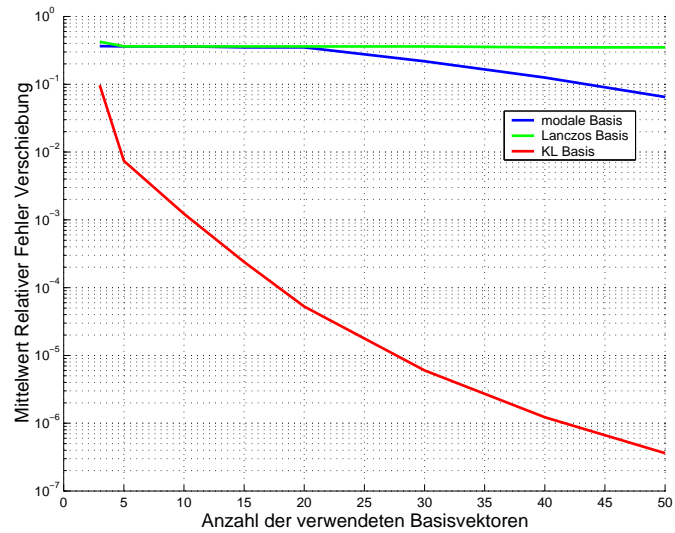


Abbildung 7.21 Mittelwerte des relativen Fehlers des Verschiebungsvektors über Anzahl der Basisvektoren.

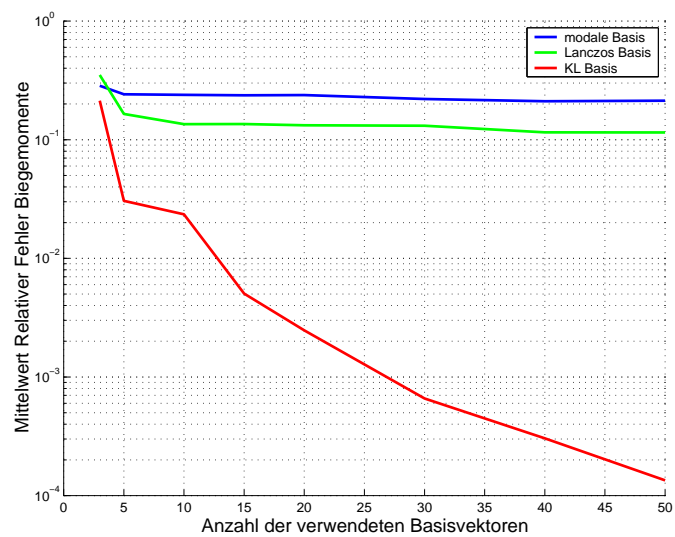


Abbildung 7.22 Mittelwerte des relativen Fehlers des Biegemomentenvektors über Anzahl der Basisvektoren.

### 7.1.4 Reduktion der aerodynamischen Variablen

Bei dem betrachteten Rotorblatt existiert neben dem Modell der Struktur das aerodynamische Modell der instationären Luftkräfte, welches fast die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden aufweist wie das Strukturmodell. Deshalb kann es wünschenswert sein, auch dieses Modell in seiner Dimension zu reduzieren. Im folgenden soll untersucht werden, ob eine Reduktion der Anzahl der aerodynamischen Variablen möglich ist und wie groß der Einfluß der Reduktion auf die Strukturantwort ist. Da die aerodynamischen Variablen von zwei unterschiedlichen Profilschnitten aufgrund der Annahme zweidimensionaler Strömung am Profilschnitt nicht miteinander gekoppelt sind, ist das Vorgehen zur Berechnung von geeigneten Basisvektoren nicht so offensichtlich wie bei der Struktur. Eine indirekte Kopplung der aerodynamischen Variablen wird durch die Strukturbewegung und die räumliche Struktur des einströmenden Windfeldes verursacht. Um die großräumigen Strukturen in der Zeitantwort der aerodynamischen Variablen zu extrahieren, bietet sich die Karhunen-Loève Entwicklung an. Der Ansatz, das gekoppelte Struktur-Aerodynamik Modell zu linearisieren und die Eigenformen dieser Linearisierung als Basisvektoren zu verwenden, ist ebenfalls möglich, hat jedoch zu keinen guten Ergebnissen geführt.

Das an jedem Gaußpunkt  $g$  der Balkenelemente des Rotorblatts befestigte aerodynamische System hat die Form

$$\dot{\mathbf{x}}_g = \mathbf{S}_{A,g}\mathbf{x}_g + \mathbf{S}_{B,g}\mathbf{u}_{a,g} = \mathbf{g}_g(\mathbf{x}_g, t). \quad (7.19)$$

All diese Teilsysteme werden mittels der Vektoren  $\mathbf{x}_a = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_{N_g}^T)^T$  und  $\mathbf{g}_a = (\mathbf{g}_1^T, \dots, \mathbf{g}_{N_g}^T)^T$ , zum Gesamtsystem  $\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{g}_a(\mathbf{x}_a, t)$  zusammengefaßt, wobei  $N_g$  die Anzahl der Gaußpunkte angibt. Durch die Berechnung des unreduzierten Modells für ein bis zwei Umdrehungen erhält man wie auch bei der Strukturbewegung Zeitverläufe der aerodynamischen Variablen  $\mathbf{x}_a(t)$ , deren diskrete Schnappschüsse  $\mathbf{x}_{a,n} = \mathbf{x}_a(n\Delta t)$  zur Berechnung einer Karhunen-Loève Basis verwendet werden können. In Abb. 7.23 sind die Karhunen-Loève Vektoren der größten Eigenwerte abgebildet. Man erkennt die großräumigen Strukturen, die in der betrachteten Zeitspanne vorherrschend aufgetreten sind.

In Abb. 7.24 und 7.25 sind die relativen Fehler beider Subsysteme mit jeweils 10, 20 und 30 Basisvektoren aufgetragen. Als Referenz dient das unreduziert mit gleicher Zeitschrittweite berechnete System. Zur Reduktion der Struktur wurde ebenfalls die Karhunen-Loève Basis verwendet. In beiden Diagrammen erkennt man deutlich das Absinken der Approximationsgüte bei Verlassen des zur Berechnung der Karhunen-Loève Basis des aerodynamischen Modells verwendeten Zeitintervalls  $t \in [0,5]$  Sekunden. In Tabelle 7.3 sind die Mittelwerte des relativen Fehlers des Verschiebungsvektors der Struktur und der aerodynamischen Variablen für verschiedene Reduktionsstufen eingetragen. Man erkennt hier einen geringen Einfluß der Anzahl der zur Reduktion der Struktur verwendeten Basisvektoren auf die Approximationsgüte des gekoppelten Modells. Die geringen

mittleren Fehler von unter fünf Prozent bei den Verschiebungen der Struktur zeigen, daß die Reduktion der aerodynamischen Variablen mittels Karhunen-Loève Basisvektoren möglich ist und eine gute Approximationsgüte liefert.

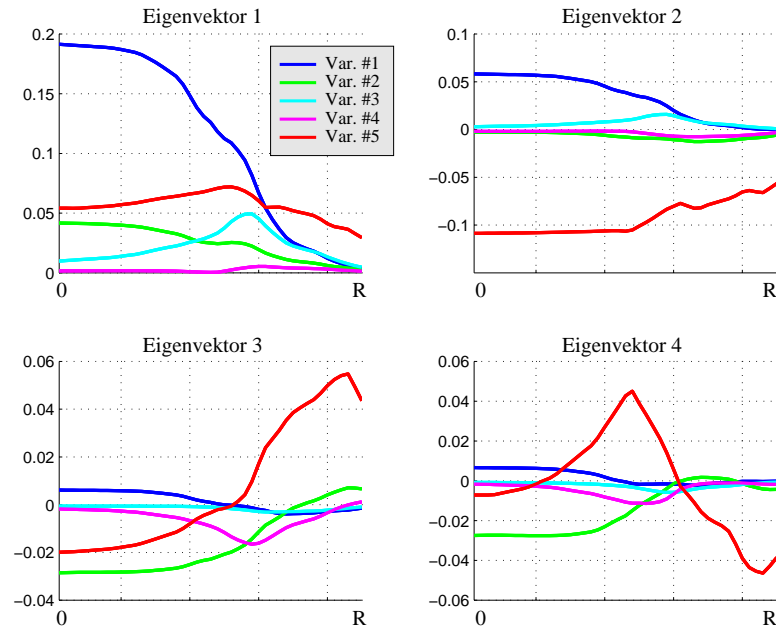


Abbildung 7.23 Eigenformen der Karhunen-Loève Basis der aerodynamischen Variablen.



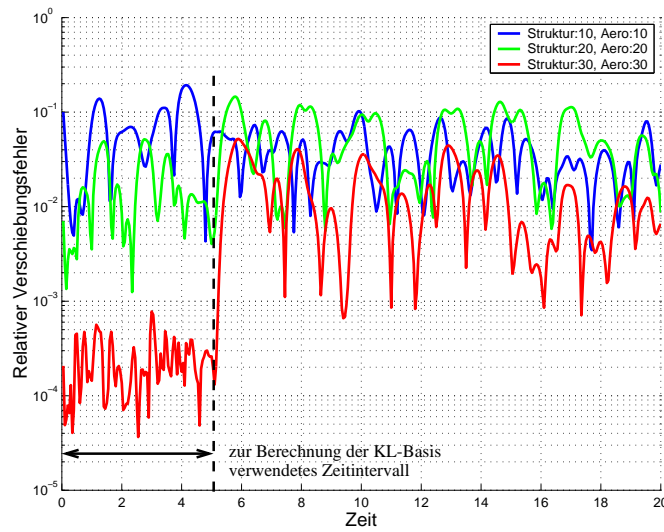


Abbildung 7.24 Relativer Fehler der Strukturverschiebung für verschiedene Reduktionsstufen des aerodynamischen Modells und verschiedene Reduktionsstufen des Strukturmodells.

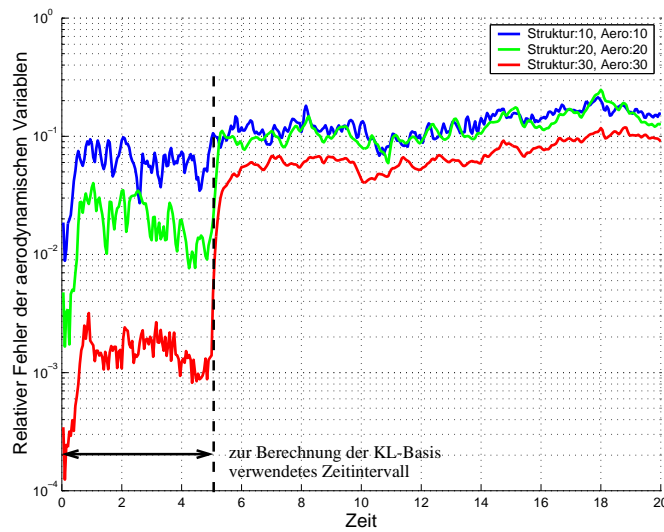


Abbildung 7.25 Relativer Fehler des Vektors der aerodynamischen Variablen für verschiedene Reduktionsstufen des aerodynamischen Modells und verschiedene Reduktionsstufen des Strukturmodells.

Tabelle 7.3 Zeitliche Mittelwerte des relativen Verschiebungsfehlers der Struktur (oben) und der aerodynamischen Variablen (unten).

Anzahl Basis-Vekt. Struktur	10	20	30
Anzahl Basis-Vekt. Aerodyn.			
10	0.046397	0.046046	0.046024
20	0.045980	0.045509	0.045485
30	0.011657	0.011007	0.010978
Anzahl Basis-Vekt. Struktur	10	20	30
Anzahl Basis-Vekt. Aerodyn.			
10	0.112856	0.112875	0.112876
20	0.094985	0.094958	0.094958
30	0.052904	0.052745	0.052744

### 7.1.5 Anwendung der dual-weighted-residual Methode

Im folgenden soll die Anwendung der DWR-Methode auf die Abschätzung des Modellreduktionsfehlers zunächst für ein statisch belastetes Rotorblatt dargestellt werden. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse dienen als Basis für die daran anschließend vorgestellte Approximation des Fehlers eines Funktional bei dynamischen Aufgaben, mittels dem sich die Funktional-angepasste Selektion eines niedrig-dimensionalen Unterraums zur effizienten Modellreduktion durchführen lässt.

#### Fehlerschätzung im statischen Fall

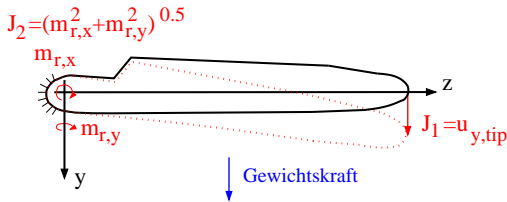


Abbildung 7.26 Eingespanntes Rotorblatt unter Gewichtskraft.

Es wird folgende Aufgabe betrachtet: Ein Rotorblatt ist an der Blattwurzel fest eingespannt, als äußere Kraft wirkt nur die Gewichtskraft  $\mathbf{f}_g$ . Das Blatt befindet sich in horizontaler Position, siehe Abb. 7.26, eine Rotationsbewegung findet nicht statt. Betrachtet wird sowohl ein lineares Funktional

$$J_1 = u_{y,tip} \quad (7.20)$$

als auch ein nichtlineares Funktional

$$J_2 = \sqrt{m_{r,y}^2 + m_{r,z}^2}. \quad (7.21)$$

Dabei beschreibt  $J_1$  die Verschiebung der Blattspitze des Rotorblatts in  $y$ -Richtung,  $J_2$  beinhaltet die Biegemomente an der Blattwurzel. Die Aufgabe wird zum einen als geometrisch linear angesehen, gegeben durch die Gleichung

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{d}_{ref,l} = \mathbf{f}_g, \quad (7.22)$$

zum anderen als geometrisch nichtlineare Aufgabe betrachtet,

$$\mathbf{f}_{in}(\mathbf{d}_{ref,n}) = \mathbf{f}_g. \quad (7.23)$$

Zur Approximation der exakten Lösung  $\mathbf{d}_{ref}$  wird wie oben beschrieben der Ansatz  $\mathbf{d}_m = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}$  gewählt. Somit erhält man die reduzierte Gleichung zu

$$\mathbf{Y}_m^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}_l = \mathbf{Y}_m^T \mathbf{f}_g \quad (7.24)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{Y}_m^T \mathbf{f}_{in}(\mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}_n) = \mathbf{Y}_m^T \mathbf{f}_g. \quad (7.25)$$

Das Residuum  $\boldsymbol{\rho}_m$  folgt durch Einsetzen von  $\mathbf{d}_m$  in die Ausgangsgleichung, also

$$\boldsymbol{\rho}_{m,l} = \mathbf{f}_g - \mathbf{K}_0 \mathbf{d}_{m,l} \quad (7.26)$$

beziehungsweise

$$\rho_{m,n} = \mathbf{f}_g - \mathbf{f}_{in}(\mathbf{d}_{m,n}). \quad (7.27)$$

Zur Abschätzung des Fehlers  $J(\mathbf{d}_{ref}) - J(\mathbf{d}_m)$  wird die duale Gleichung verwendet. Sie lautet im linearen Fall

$$\mathbf{K}_0^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}, \quad (7.28)$$

wobei der Vektor  $\mathbf{p}$  als die Ableitung von  $J$  nach  $\mathbf{d}$  definiert ist, ausgewertet am Punkt  $\mathbf{d}_m$ ,

$$\mathbf{p} = \left. \frac{\partial J_{1,2}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}_m}. \quad (7.29)$$

Bei nichtlinearen Funktionalen führt man hierdurch einen Fehler der Ordnung  $O(\|\mathbf{d}_{ref} - \mathbf{d}_{m,n}\|^2)$  ein. Im Fall der nichtlinearen Aufgabenstellung ist die duale Gleichung gegeben durch die Transponierte der Linearisierung der Ausgangsgleichung Gl. (7.23),

$$\left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \mathbf{f}_{in}((1-s)\mathbf{d} + s\mathbf{d}_{m,n})}{\partial \mathbf{d}} \right) ds \right]^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}. \quad (7.30)$$

Da die exakte Lösung der Ausgangsgleichung im allgemeinen nicht bekannt ist, wird Gleichung (7.30) am Punkt  $\mathbf{d}_{m,n}$  statt  $\mathbf{d}$  ausgewertet. Der Fehler  $J(\mathbf{d}_{ref}) - J(\mathbf{d}_m)$  kann mittels dualer Lösung und Residuum ausgedrückt werden gemäß

$$J(\mathbf{d}_{ref}) - J(\mathbf{d}_m) = \rho_m^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (7.31)$$

Bei nichtlinearem Funktional beziehungsweise nichtlinearer Ausgangsgleichung gilt diese Gleichung aufgrund der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung nur näherungsweise. Ist die Dimension der Ausgangsgleichung sehr groß, muß auch die duale Gleichung in einer reduzierten Basis gelöst werden. Dann wird für  $\boldsymbol{\lambda}$  ein Ansatz der Form  $\boldsymbol{\lambda} \approx \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{Z}_k \boldsymbol{\eta}$  gewählt. Die duale Gleichung reduzierter Dimension ist gegeben durch

$$\mathbf{Z}_k^T \mathbf{K}_0^T \mathbf{Z}_k \boldsymbol{\eta} = \mathbf{Z}_k^T \mathbf{p}. \quad (7.32)$$

Man erhält eine Approximation des Fehlers der Form

$$J(\mathbf{d}_{ref}) - J(\mathbf{d}_m) \approx \rho_m^T \boldsymbol{\lambda}_k. \quad (7.33)$$

Um die Auswirkungen der verschiedenen Näherungen auf die Güte der Approximation des Fehlers zu untersuchen, werden folgende Rechnungen durchgeführt: Die reduzierte Gleichung wird mit einer unterschiedlichen Anzahl  $m$  von Basisvektoren berechnet,  $m = (10, 20, \dots, 100)$ . Der Fehler der mittels der verschiedenen Approximationen  $\mathbf{d}_m$  berechneten Funktionale kann mithilfe der exakten Lösung  $\mathbf{d}_{ref}$  der unreduzierten Gleichung berechnet werden. Er wird verglichen mit der Approximation des Fehlers mittels der DWR-Methode unter Verwendung der exakten Lösung der dualen Gleichung, also ohne Reduktion der Dimension. Weiterhin wird die duale Gleichung mit unterschiedlicher

Zahl  $k = (50, 70, 90)$  von Basisvektoren approximiert. Zur Reduktion wird die modale Basis verwendet, sowohl für die Ausgangsgleichung wie auch für die duale Gleichung. Die Ergebnisse sind in Abb. 7.27 für die lineare Ausgangsgleichung mit linearem Funktional, in Abb. 7.28 für das nichtlineare Funktional sowie in Abb. 7.29 und 7.30 für das nichtlineare Ausgangsproblem dargestellt.

Wie erwartet ist der mittels der Lösung der unreduzierten dualen Gleichung berechnete Fehler identisch mit dem wirklich vorhandenen Fehler. Auch beim nichtlinearen Funktional sowie beim nichtlinearen Ausgangsproblem ist eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen. Löst man die duale Gleichung in einer reduzierten Basis, so verschlechtert sich die Approximationsgenauigkeit abhängig von der Anzahl der zur Reduktion der dualen Gleichung verwendeten Basisvektoren. In dem Fall, wo die Lösung  $\lambda_k$  der reduzierten dualen Gleichung in dem Raum liegt, der auch zur Reduktion des Ausgangsproblems verwendet wird, ist aufgrund der Galerkin-Orthogonalität das innere Produkt  $\langle \rho_m, \lambda_k \rangle$  gleich Null, wie in allen Diagrammen gut zu erkennen ist. Hierdurch kann eine Unterschätzung des Fehlers auftreten. Aus diesem Grund ist es notwendig, für eine gute Approximation des tatsächlich vorhandenen Fehlers eine möglichst gute Approximation der dualen Gleichung zu berechnen.

### Basiswahl im dynamischen Fall

Zur Approximation des Funktionalfehlers bei einer Berechnung des dynamischen Verhaltens des Rotorblatts muß zusätzlich zur Ausgangsdifferentialgleichung eine duale Differentialgleichung für die betrachtete Zeitspanne gelöst werden. Aus diesem Grund ist die Anwendung der DWR-Methode zur adaptiven Anpassung der Zeitschrittweite, wie es zum Beispiel bei LOGG [126] beschrieben wird, im Fall der Langzeitsimulation von Windturbinen nicht sinnvoll. Es ist jedoch möglich, die während ein oder zwei Umdrehungen berechnete Approximation des Fehlers zur Selektion eines auf das betrachtete Funktional speziell angepaßten Unterraums für die anschließende Langzeitintegration zu verwenden, um so die Effizienz der Zeitintegration zu steigern.

Für  $J(\mathbf{d})$  wird analog zum vorigen Abschnitt die Verschiebung der Blattspitze gewählt, diesmal in Windrichtung,

$$J(\mathbf{d}) = \int_0^T u_{x,tip}. \quad (7.34)$$

Die Ausgangsgleichung ist durch Gl. (7.1) gegeben. Die Reduktion mittels des Ansatzes  $\mathbf{d}_m = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}$  führt wie oben beschrieben bei homogenen Anfangsbedingungen auf die reduzierte Gleichung

$$\mathbf{Y}_m^T \mathbf{f}(\mathbf{Y}_m \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}_m \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) = \mathbf{0}, \quad t \in [0, T], \quad (7.35)$$

mit dem Residuum

$$\rho_m = \mathbf{f}(\mathbf{Y}_m \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}_m \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\xi}, t). \quad (7.36)$$

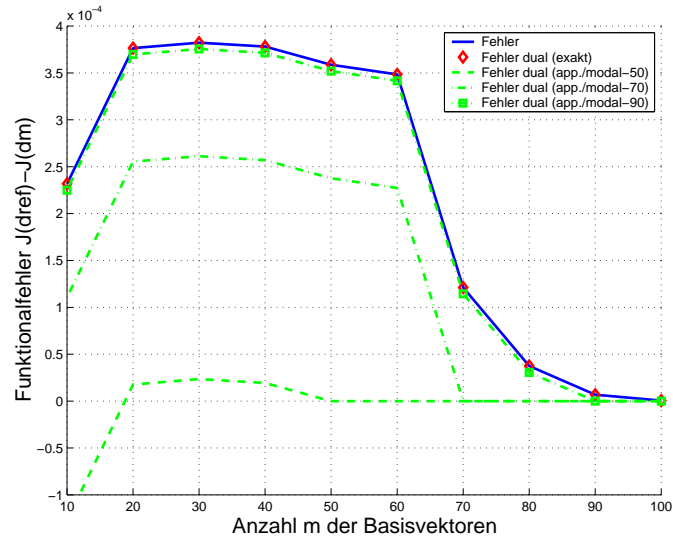


Abbildung 7.27 Approximation des Fehlers bei linearer Ausgangsgleichung und  $J_1$ .

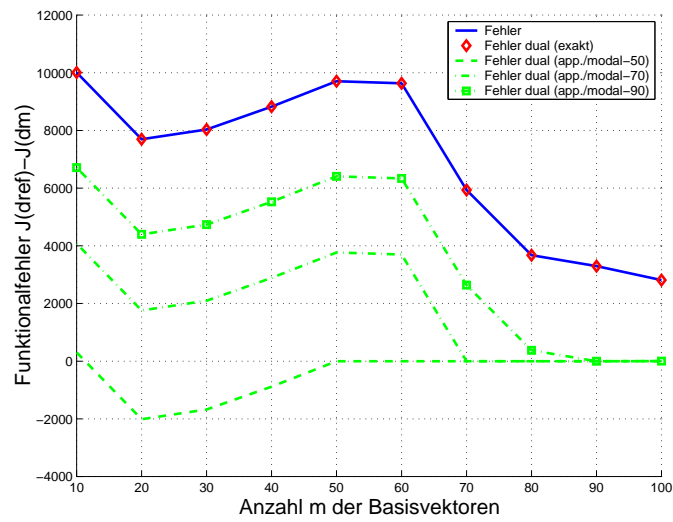


Abbildung 7.28 Approximation des Fehlers bei linearer Ausgangsgleichung und  $J_2$ .

## 7.1 Berechnung des dynamischen Verhaltens eines Rotorblatts

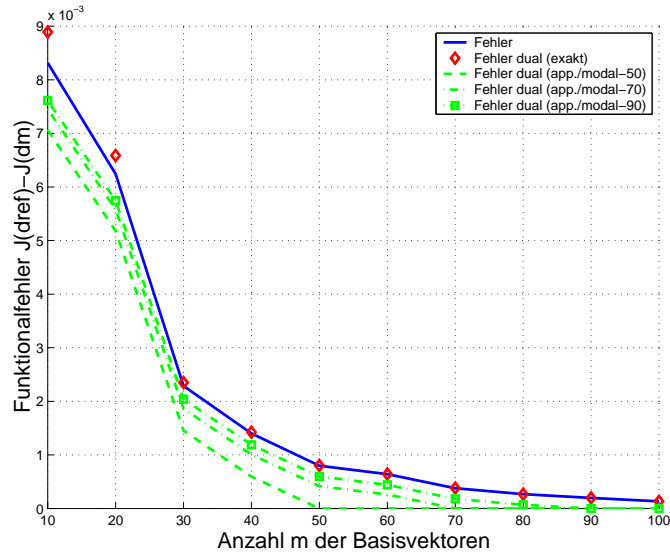


Abbildung 7.29 Approximation des Fehlers bei nichtlinearer Ausgangsgleichung und  $J_1$ .

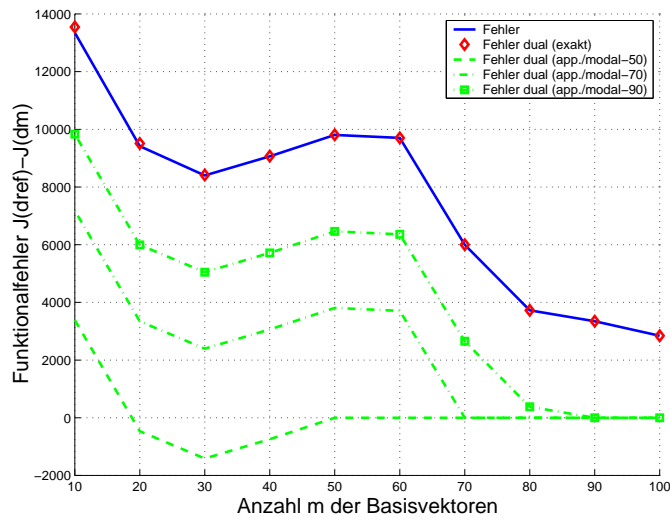


Abbildung 7.30 Approximation des Fehlers bei nichtlinearer Ausgangsgleichung und  $J_2$ .

Die lineare duale Gleichung lautet

$$\mathbf{M}(t)^T \ddot{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{C}(t)^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{K}(t)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p}, \quad \boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}(T) = \mathbf{0} \quad (7.37)$$

mit  $\mathbf{M}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{d}}}$ ,  $\mathbf{C}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}}$  und  $\mathbf{K}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{d}}$ . Da diese Matrizen entlang der Lösung der reduzierten Ausgangsgleichung (7.35) ausgewertet werden müssen, wird zunächst dieses für die betrachtete Zeitspanne  $[0, T]$  gelöst, die zwei Umdrehungen entspricht. Daran anschließend wird die duale Gleichung rückwärts gelöst. Mittels der Transformation  $t = T - \tau$  kann diese in eine für  $\tau$  vorwärts in der Zeit zu lösende Aufgabe transformiert werden, so daß Standard-Zeitintegrationsroutinen verwendet werden können. Ist das Ausgangssystem von Differentialgleichungen sehr groß, so wird man die duale Gleichung ebenfalls in einer reduzierten Basis berechnen, wie im vorigen Abschnitt beim statischen Fall beschrieben. Mittels dualer Lösung  $\boldsymbol{\lambda}$  und Residuum  $\boldsymbol{\rho}$  kann nun der Fehler

$$J(\mathbf{d}_{ref}) - J(\mathbf{d}_m) \approx \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\rho} dt \quad (7.38)$$

approximiert werden. Sind die Anfangsbedingungen der Ausgangsgleichung nicht gleich Null, so kommen die konstanten Randterme  $\langle \boldsymbol{\lambda}(0), \mathbf{d}(0) - \mathbf{d}_m(0) \rangle$  und  $\langle \dot{\boldsymbol{\lambda}}(0), \mathbf{v}(0) - \mathbf{v}_m(0) \rangle$  hinzu. In Abb. 7.31 sind die Ergebnisse für verschiedene Werte  $m = (10, 20, \dots, 50)$  von Basisvektoren zur Reduktion der Ausgangsgleichung dargestellt. Dabei wird die duale Gleichung sowohl unreduziert als auch reduziert mit 50 und 100 modalen Basisvektoren gelöst sowie mit unterschiedlichen Zeitschrittweiten berechnet. Man erkennt eine gute Übereinstimmung der Verläufe von approximiertem und tatsächlich vorhandenem Fehler. Auch hier erkennt man wieder die Auswirkung der Galerkin-Orthogonalität: Wenn  $m_{dual} \leq m_{primal}$  gilt, also die Dimension der reduzierten dualen Gleichung kleiner oder gleich der Dimension der reduzierten Ausgangsgleichung ist, ist die Lösung  $\boldsymbol{\lambda}_{m,dual}$  orthogonal zum Residuum  $\boldsymbol{\rho}_{m,primal}$ .

Zur Berechnung des in der Einleitung erwähnten Fehlerindikators zur Auswahl von Basisvektoren wird, wie in Abschnitt 5.5 beschrieben, die komponentenweise Multiplikation von  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\boldsymbol{\rho}$  über die Zeit integriert und auf die zur Reduktion des Ausgangsproblems verwendeten Basisvektoren projiziert. Hierdurch ergibt sich ein Fehlerindikator für jeden der verwendeten Basisvektoren, der zur Auswahl einer geeigneten Basis für die Langzeitintegration verwendet werden kann. In Abb. 7.32 ist das Ergebnis einer solchen Berechnung für die modale Basis dargestellt. Ordnet man die Basisvektoren nach dem Wert ihres Fehlerindikators, so ergibt sich eine Rangfolge, beispielhaft dargestellt in Tabelle 7.4. Die unteren Basisvektoren dieser neu geordneten Basis sind nun speziell zur Approximation des betrachteten Funktional geeignet. In den Abb. 7.33 und 7.34 sind für die modale Basis und die Karhunen-Loève Basis jeweils das Ergebnis der mittels dem dualen Fehlerindikator ausgewählten Basis und das Ergebnis der mittels der unteren  $m$  Basisvektoren berechneten Werte dargestellt. Man erkennt eine signifikante Verbesserung der Approximationsgüte des Funktional. Bei der Lanczos Basis ist keine Verbesserung



## 7.1 Berechnung des dynamischen Verhaltens eines Rotorblatts

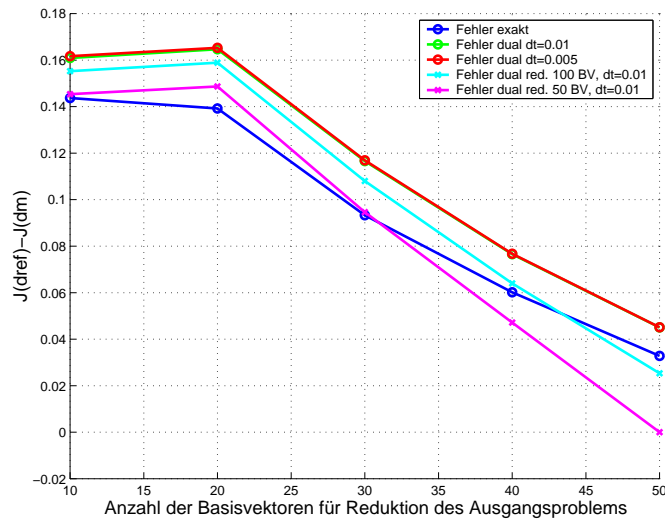


Abbildung 7.31 Vergleich von exaktem und approximiertem Fehler.

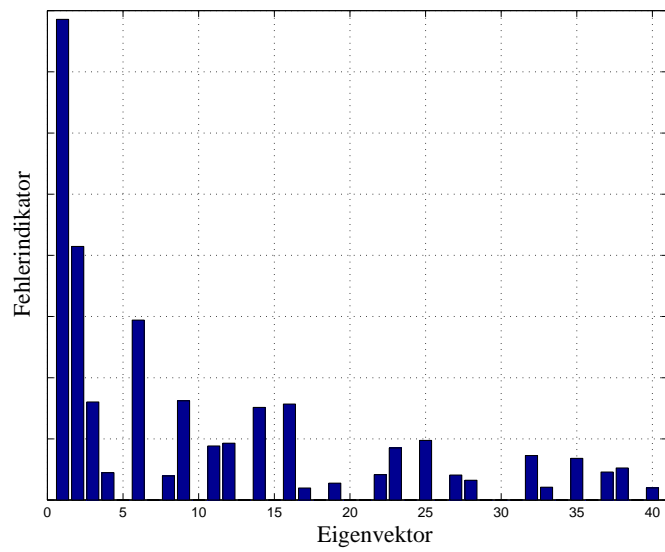


Abbildung 7.32 Fehlerindikator zur Auswahl von Basisvektoren.

## 7 Numerische Beispiele

festzustellen, dies ist jedoch nicht auf den verwendeten Fehlerindikator zurückzuführen, sondern auf die Tatsache, daß die Einbeziehung von höheren Lanczos-Vektoren bei dem untersuchten Beispiel, wie in Abschnitt 7.1.3 gezeigt, keine Verbesserung der Approximationsgüte mit sich bringt.

Tabelle 7.4 Reihenfolge der Basisvektoren gemäß dualem Fehlerindikator.

Modale Basis	1, 2, 6, 9, 3, 16, 14, 25, 12, 11, 23, 32, ...
Lanczos Basis	1, 2, 3, 6, 4, 11, 5, 8, 9, 12, 29, 14, ...
Karhunen-Loève Basis	1, 3, 2, 4, 7, 10, 8, 30, 18, 6, 27, 9, ...

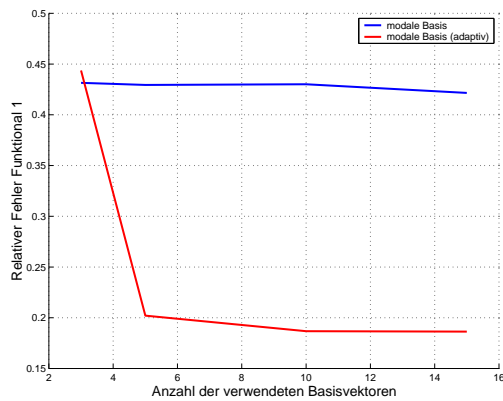


Abbildung 7.33 Relativer Fehler des Funktionals über Anzahl der Basisvektoren der modalen Basis.

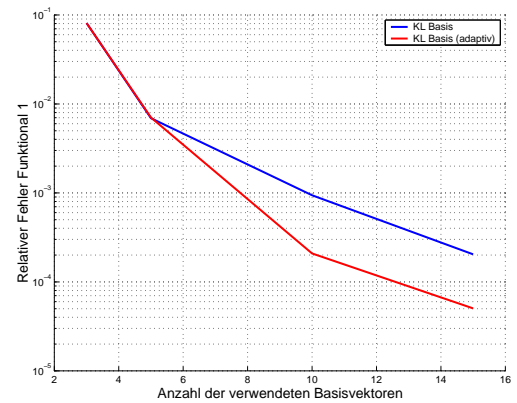


Abbildung 7.34 Relativer Fehler des Funktionals über Anzahl der Basisvektoren der KL Basis.

### 7.1.6 Nichtlineare und postprocessed Galerkin Methode

In diesem Abschnitt soll die Anwendung der nichtlinearen bzw. postprocessed Galerkin-Methode beschrieben und die erzielten Ergebnisse mit denen der normalen Reduktion verglichen werden. Das System der Windkraftanlage ist zu komplex, um die Annahmen der Methoden streng mathematisch überprüfen zu können. Da jedoch nur die Idee dieser Methoden zur Verbesserung der Approximationsgüte des reduzierten Modells verwendet werden soll, ist dies auch nicht erforderlich. Der Algorithmus zur Zeitintegration des reduzierten Modells bei Verwendung des normalen Galerkin-Verfahrens kann für den Zeitschritt  $n + 1$  bei Verwendung des Newton-Raphson Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wie folgt dargestellt werden:

```

Setze  $i = 0$ , berechne Startwerte  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$ 
Berechne  $\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}$  und  $\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i)}$ 
  Beginne Iteration,  $i = i + 1$ 
  Löse  $\Delta \mathbf{d}^{(i)} = -\mathbf{Y}_m^T (\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i-1)})^{-1} \boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i-1)}$ 
  Führe Update der Variablen  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$  durch
  Berechne  $\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}$  und  $\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i)}$ 
  Ist  $\|\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}\| \leq \epsilon \|\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(0)}\| \rightarrow$  beende Iteration
Beginne nächsten Zeitschritt.

```

Bei der nichtlinearen Galerkin-Methode kann der Algorithmus formuliert werden als:

```

Setze  $i = 0$ , berechne Startwerte  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$ 
Berechne  $\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}$ 
  Beginne Iteration,  $i = i + 1$ 
    Auswertung der AIM( $\mathbf{d}_{n+1}^{(i-1)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i-1)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i-1)}$ )
    Berechne Korrektur  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i-1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{(i-1)} + \text{AIM}$ 
    Berechne  $\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i-1)}$  und  $\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i-1)}$ 
    Löse  $\Delta \mathbf{d}^{(i)} = -\mathbf{Y}_m^T (\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i-1)})^{-1} \boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i-1)}$ 
    Führe Update der Variablen  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$  durch
    Berechne  $\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}$ 
    Ist  $\|\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}\| \leq \epsilon \|\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(0)}\| \rightarrow$  beende Iteration
Beginne nächsten Zeitschritt.

```

Grau unterlegt sind dabei die Änderungen zum Algorithmus des normalen Galerkin Verfahrens. Aufgrund der Einbeziehung der AIM ist eine zusätzliche Berechnung der Kraftvektoren des gesamten nichtlinearen Systems pro Iterationsschritt notwendig. Dies führt zu einem erhöhten Rechenaufwand, der für die effiziente Langzeitintegration der

Windkraftanlage nicht akzeptabel ist. Es hat sich auch gezeigt, daß bei Verwendung des impliziten Zeitintegrationsverfahrens aufgrund der Einbeziehung hoher Frequenzen durch die AIM die Konvergenz der Newton-Raphson Iteration verschlechtert oder verhindert wird. Aus diesen Gründen ist die Anwendung der nichtlinearen Galerkin-Methode für Langzeitsimulationen nicht sinnvoll. Bei der postprocessed Galerkin Methode und der Verwendung der quasi-stationären AIM beschränkt sich der zusätzliche Rechenaufwand dagegen auf eine Matrix-Vektor Multiplikation, die maximal einmal pro Zeitschritt nach dem Ende der Iteration durchgeführt wird. Der Algorithmus lautet in diesem Fall:

```

Setze  $i = 0$ , berechne Startwerte  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$ 
Berechne  $\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}$  und  $\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i)}$ 
  Beginne Iteration,  $i = i + 1$ 
  Löse  $\Delta \mathbf{d}^{(i)} = -\mathbf{Y}_m^T (\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i-1)})^{-1} \boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i-1)}$ 
  Führe Update der Variablen  $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$  durch
  Berechne  $\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}$  und  $\mathbf{K}_{\text{eff,red}}^{(i)}$ 
  Ist  $\|\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(i)}\| \leq \epsilon \|\boldsymbol{\rho}_{\text{red}}^{(0)}\| \rightarrow$  beende Iteration
Auswertung der AIM( $\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$ )
Berechne  $\hat{\mathbf{d}}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \text{AIM}$ 
Beginne nächsten Zeitschritt.

```

Um die Voraussetzungen für die Anwendung der postprocessed Galerkin-Methode zu schaffen, sammelt man die ersten  $m$  Basisvektoren der gewählten Basis in der Matrix  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$  und fasst die übrigen Basisvektoren in der Matrix  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{y}_{m+1}, \dots, \mathbf{y}_n\}$  zusammen. Als Ansatz wählt man statt  $\mathbf{d}_m = \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi}$  nun

$$\mathbf{d} \approx \mathbf{d}_m = \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}. \quad (7.39)$$

Eingesetzt in die Gleichung (7.1) und projiziert auf den durch die Vektoren in  $\mathbf{Y}$  aufgespannten Raum  $\mathcal{Y}$  folgt

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}^T \mathbf{M}(\mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}) \mathbf{Y} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Y} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{Y}^T \mathbf{h}(\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Z}\ddot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Z}\dot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}, t) \\ & + \mathbf{Y}^T \mathbf{M}(\mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}) \mathbf{Z} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Z} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Die Projektion auf den durch die Vektoren in  $\mathbf{Z}$  aufgespannten Raum  $\mathcal{Z}$  ergibt

$$\begin{aligned} & \mathbf{Z}^T \mathbf{M}(\mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}) \mathbf{Z} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Z}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Z} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Z}^T \mathbf{h}(\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Z}\ddot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Z}\dot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}, t) \\ & \mathbf{Z}^T \mathbf{M}(\mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}) \mathbf{Y} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Z}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Y} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Bei Verwendung der mittels  $\mathbf{K}_0$  berechneten modalen Basis sind die Terme  $\mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Z}$  sowie  $\mathbf{Z}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}$  identisch Null, da die Eigenvektoren in  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{Z}$  orthogonal in Bezug

auf  $\mathbf{K}_0$  sind. Dies ist bei Verwendung der Lanczos oder KL Basis nicht der Fall. Um die benötigte Beziehung zwischen den Variablen  $\boldsymbol{\eta}$  und  $\boldsymbol{\xi}$  herzuleiten, wird zunächst die Annahme getroffen, daß die hochfrequenten, kurzwelligen Eigenformen nicht zur dynamischen Systemantwort beitragen,

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\boldsymbol{\eta}} \equiv \mathbf{0}. \quad (7.42)$$

Das entspricht der Annahme der quasi-statischen approximierten inertialen Mannigfaltigkeit [193], ähnlich der Methode der statischen Korrektur bei linearen Problemen, und führt zu den modifizierten Ausgangsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}^T \mathbf{M}(\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta})\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Y}^T \mathbf{h}(\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}, t) \\ & + \mathbf{Y}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.43)$$

sowie

$$\begin{aligned} & \mathbf{Z}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{Z}^T \mathbf{h}(\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta}, t) + \\ & \mathbf{Z}^T \mathbf{M}(\mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\eta})\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{Z}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Gleichung (7.44) ist eine nichtlineare Gleichung für  $\boldsymbol{\eta}$ , die näherungsweise zu lösen ist. Das geschieht gemäß [193] im einfachsten Fall mit einer Fixpunkt-Iteration mit dem Startwert  $\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \mathbf{0}$ . Dann ergibt sich unter Berücksichtigung der Definition von  $\mathbf{h}$  die gesuchte AIM zu

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = -(\mathbf{Z}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{f}(\mathbf{Y}\ddot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Y}\boldsymbol{\xi}, t). \quad (7.45)$$

Um die Genauigkeit der Approximation zu erhöhen, kann eine zweite Iteration durchgeführt werden. Da hierzu jedoch die Auswertung des gesamten nichtlinearen Modells notwendig ist, leidet darunter die Effizienz der Berechnung. Dies ist ebenfalls bei der Verwendung des Newton-Raphson Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (7.44) der Fall, da dann in jedem Iterationsschritt eine Matrix der Dimension des Vektors  $\boldsymbol{\eta}$  zu faktorisieren ist. Bei der quasi-statischen AIM nach Gl. 7.45 ist dagegen die konstante Matrix  $\mathbf{Z}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{Z}$  nur einmal zu Beginn der Berechnung zu faktorisieren, im Fall der modalen Basis ist diese Matrix sogar diagonal. Die postprocessed Galerkin Methode setzt nun in Gl. (7.43)  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  und verwendet die Beziehung (7.45) nur dann zur Verbesserung der Lösung gemäß Gl. (7.39), wenn ein Ausgabewert benötigt wird, also maximal einmal pro Zeitschritt.

Im folgenden werden die Ergebnisse der Berechnung des Rotorblatts mit reduzierter Basis bei Verwendung der mittels einer Fixpunkt-Iteration erhaltenen AIM gemäß Gl. (7.45) vorgestellt. Dafür werden jeweils 200 Basisvektoren der einzelnen Basen berechnet. Die Anzahl  $m$  der Primärbasisvektoren ist in den folgenden Abbildungen auf der x-Achse aufgetragen, die Anzahl der Sekundär-Basisvektoren beträgt jeweils  $200 - m$ . Man erhält bei allen drei Basen keine Verbesserung der Mittelwerte des relativen Fehlers der Verschiebungen. Beispielhaft sind in Abb. 7.35 die Ergebnisse der modalen Basis dargestellt.

Bei modaler und KL Basis ist jedoch eine signifikante Verbesserung der Mittelwerte des Biegemomentenfehlers zu erkennen, siehe Abb. 7.36 und 7.38. Bei der Lanczos Basis zeigt sich nur bei den unteren Basisvektoren eine Verbesserung der Approximationsgüte der Biegemomente, wie in Abb. 7.37 zu sehen ist, zurückzuführen auf den schon erwähnten Mangel einer Verbesserung der Approximationsgüte mit zunehmender Dimension der generierten Lanczos Basis.

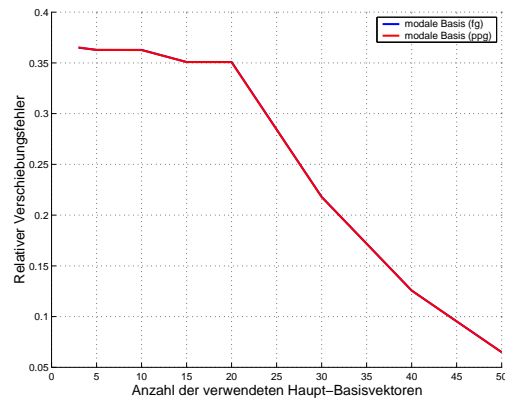


Abbildung 7.35 Mittelwerte des Verschiebungsfehlers für die normale und postprocessed Galerkin Methode über Anzahl von Primär-Basisvektoren der modalen Basis. Die Kurven liegen aufeinander.

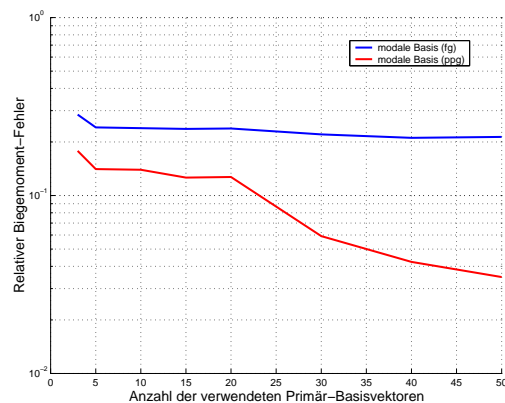


Abbildung 7.36 Mittelwerte des Biegemomentenfehlers für die normale und postprocessed Galerkin Methode über Anzahl von Primär-Basisvektoren der modalen Basis.

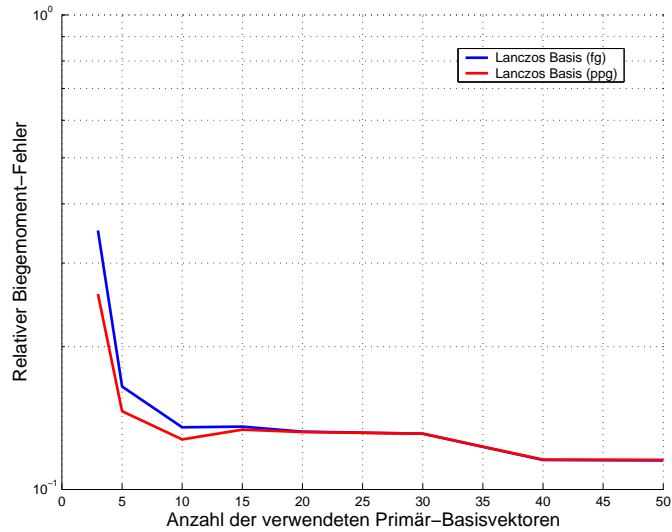


Abbildung 7.37 Mittelwerte des Biegemomentenfehlers für die normale und postprocessed Galerkin Methode über Anzahl von Primär-Basisvektoren der Lanczos Basis.

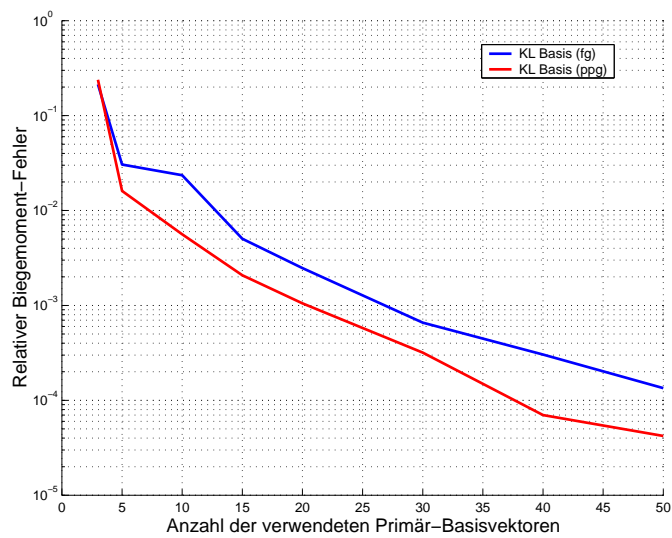


Abbildung 7.38 Mittelwerte des Biegemomentenfehlers für die normale und postprocessed Galerkin Methode über Anzahl von Primär-Basisvektoren der Karhunen-Loève Basis.

## 7.2 Simulation der Gesamtdynamik

Nach der Betrachtung einer Substruktur soll in diesem Abschnitt die Simulation der Gesamtdynamik einer Windkraftanlage unter Verwendung der Modellreduktion beschrieben werden. Das Strukturmodell ist in Abb. 7.39 schematisch dargestellt. Turm

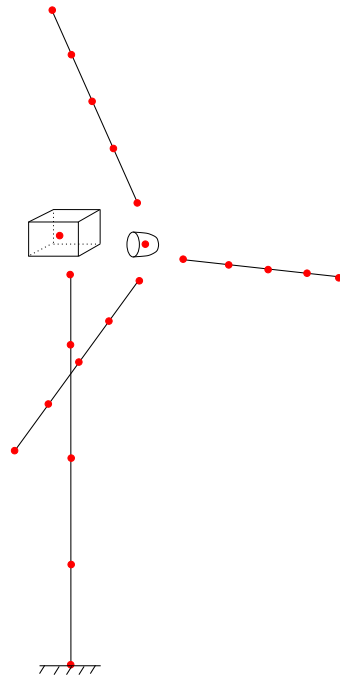


Abbildung 7.39 Schematische Darstellung des Strukturmodells.

und Rotorblätter werden mit den in Kapitel 3 beschriebenen Balkenelementen modelliert, Generatorhaus und Nabe werden als Starrkörper beschrieben. Der Turm wird dabei mit 20 Balkenelementen und die Rotorblätter werden jeweils mit 46 Balkenelementen diskretisiert. Das führt zu einer Gesamtzahl von 942 Freiheitsgraden des Strukturmodells und 690 Freiheitsgraden des Dynamic Stall Modells. Versatzlasten werden durch Verwendung des in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen „master-slave“ Prinzips berücksichtigt. In Abb. 7.40 ist zusätzlich ein Standbild aus einem mit dem Visualisierungssystem AVS erzeugten Film der Bewegung der Windkraftanlage und des Windfelds abgebildet. Auf den Rotorblättern sind die Anstellwinkel durch Farben dargestellt, die Zuordnung geschieht mit der rechts abgebildeten Legende der Einheit  $[deg]$ . Auf gleiche Weise können weitere Größen wie Schubkraft oder Drehmoment an den Rotorblättern oder am Turm dargestellt werden. Die Windgeschwindigkeiten sind ebenfalls durch ihre Farbe zuzuordnen, hier gilt die links gezeigte Legende der Einheit  $[m/s]$ .



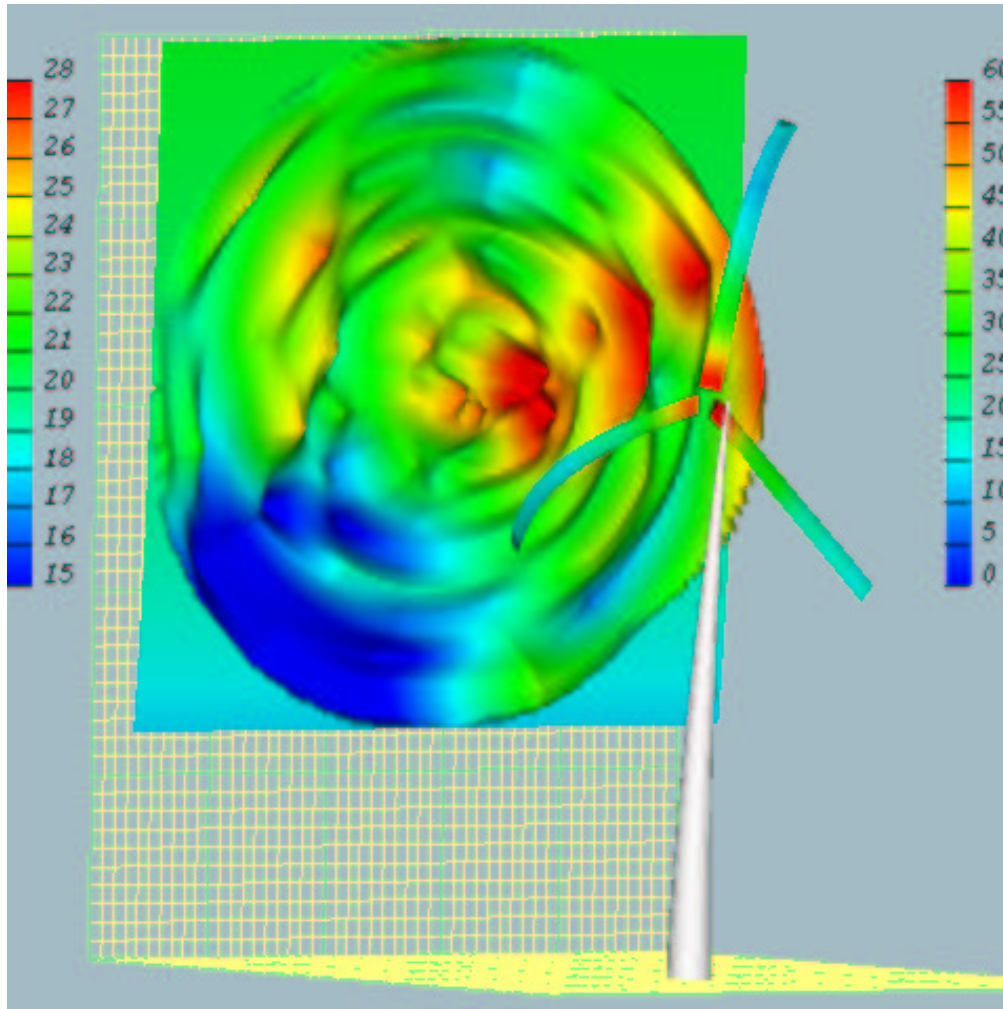


Abbildung 7.40 Visualisierung mit AVS.

### 7.2.1 Kopplung der Substrukturen

Zur Darstellung des Kopplungsprozesses werden im folgenden beispielhaft zwei Substrukturen betrachtet, die zum Gesamtsystem gekoppelt werden sollen. Verwendet man das Newmark-Verfahren zur Zeitdiskretisierung, so müssen in jedem Iterationsschritt des Newton-Raphson Verfahrens die effektiven Steifigkeitsmatrizen und die Residuen der Substrukturen zum Gesamtsystem assembliert werden. Dazu werden die Gleichungssysteme aufgeteilt in freie Variablen mit dem Index  $f$  und Kopplungsvariablen mit dem Index  $k$ ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{i1} & \mathbf{K}_{i2} \\ \mathbf{K}_{i3} & \mathbf{K}_{i4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d}_{ik} \\ \Delta \mathbf{d}_{if} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{ik} \\ \boldsymbol{\rho}_{if} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2. \quad (7.46)$$

Bei der effektiven Steifigkeitsmatrix ist dabei der Index (eff) zur Vereinfachung der Darstellung weggelassen. Bei der Kopplung muß berücksichtigt werden, daß jede Substruktur in ihrem eigenen Koordinatensystem beschrieben wird. Zwischen den Kopplungsvariablen existiert die Zwangsbedingung

$$\mathbf{d}_{1k} = \mathbf{R}_{12} \mathbf{d}_{2k}. \quad (7.47)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{R}_{12}$  die Transformationsmatrix zwischen dem Koordinatensystem der Substruktur 1 und der Substruktur 2. Das Gesamtsystem unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung (7.47) folgt zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} + \mathbf{R}_{12} \mathbf{K}_{21} \mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{R}_{12} \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{23} \mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d}_{1k} \\ \Delta \mathbf{d}_{1f} \\ \Delta \mathbf{d}_{2f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{1k} + \mathbf{R}_{12} \boldsymbol{\rho}_{2k} \\ \boldsymbol{\rho}_{1f} \\ \boldsymbol{\rho}_{2f} \end{pmatrix}. \quad (7.48)$$

Die Kopplung weiterer Substrukturen erfolgt auf dieselbe Weise.

### 7.2.2 Behandlung der Kopplungsstellen im reduzierten Modell

Bei der Wahl der Basisvektoren für die Reduktion der Bewegungsgleichungen der Substruktur stellt sich die Frage nach der Behandlung der Kopplungsvariablen. Hierzu ist ein ausführlicher Überblick bei GASCH und KNOTHE [66] und den darin zitierten Literaturstellen zu finden. Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten bei der Berechnung der Basisvektoren: (i) Verwendung von freien Kopplungsvariablen oder (ii) Vorgabe von homogenen Randbedingungen für die Kopplungsvariablen. Letzteres wird als Methode der gefesselten Koppelstellen bezeichnet und geht auf HURTY [90] zurück. Meist wird laut GASCH und KNOTHE [66] das Verfahren der gefesselten Koppelstellen eingesetzt, zum Beispiel verwenden MORAND und OHAYON [134] diese Vorgehensweise zur Berechnung von Problemen der Fluid-Struktur Wechselwirkung, da es in vielen Fällen eine bessere Approximationsgüte aufweist als das Verfahren mit freien Koppelstellen.

Durch Vorgabe von homogenen Randbedingungen für die Kopplungsvariablen werden diese zunächst aus dem Berechnungsprozeß eliminiert und die Basisvektoren für die

gefesselten Substrukturen berechnet. Daran anschließend werden  $l$  statische Verschiebungsfiguren  $\hat{\Psi} = [\Psi_1, \dots, \Psi_l]$  berechnet, im Englischen „constraint modes“ genannt, die von Einheitsverschiebungen an den  $l$  Kopplungsvariablen hervorgerufen werden. Sind die Variablen der Substruktur  $i$  gemäß  $\mathbf{d}_i^T = (\mathbf{d}_{ik}^T, \mathbf{d}_{if}^T)$  in gekoppelte und freie Variablen aufgeteilt und bezeichnet  $\mathbf{Y}_{i,m}$  die Matrix der Basisvektoren, die mittels fester Koppelstellen berechnet wurden, folgt als Ansatz für das reduzierte Modell der  $i$ -ten Substruktur

$$\mathbf{d}_i \approx \mathbf{d}_{i,m} = \bar{\mathbf{Y}}_{i,m} \boldsymbol{\xi}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hat{\Psi}_i & \mathbf{Y}_{i,m} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_i. \quad (7.49)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Bewegungsgleichungen der Substruktur ein, so bleiben die Variablen  $\mathbf{d}_{i,k}$  in ihrer physikalischen Bedeutung erhalten und die Kopplung kann genau wie im vorigen Abschnitt beschrieben durchgeführt werden. Hierdurch wird die programmtechnische Umsetzung erheblich vereinfacht und die Anwendung aller im vorigen Abschnitt bei der Substruktur des Rotorblatts vorgestellten Methoden auf das Gesamtsystem der Windkraftanlage ist ohne Komplikationen möglich.

### 7.2.3 Vergleich der Approximationsgüte

Um zu untersuchen, ob die bei der Reduktion des Rotorblatts erzielten Ergebnisse auf die gesamte Windkraftanlage übertragbar sind, werden nun die Ergebnisse der Berechnung des unreduzierten Modells der Anlage mit denen des reduziert berechneten Modells verglichen. Die Rotorblätter werden unter Verwendung der modalen Basisvektoren und der Karhunen-Loève Basisvektoren berechnet, dabei stimmen die Vektoren mit denen des Abschnitts 7.1.2 überein. Für den Turm wird in beiden Fällen die modale Basis verwendet, da aufgrund der Verwendung von festen Kopplungsstellen nur diese Basis berechnet werden kann. In Abb. 7.41 und 7.42 sind die Ergebnisse der normalen Galerkin Methode für den relativen Verschiebungsfehler sämtlicher Variablen des FE-Modells bzw. der relative Fehler aller Biegemomente dargestellt. Die Eingangsgröße, also das turbulente Windfeld, entspricht dem auch in Abschnitt 7.1.3 verwendeten Windfeld, im folgenden mit Windfeld (1) bezeichnet. Auch bei der Berechnung der Gesamtdynamik zeigt die Karhunen-Loève Basis eine hohe Approximationsgüte, die Mittelwerte der Fehler sind in Tabelle 7.5 zu finden. Daß die KL-Basis nicht nur für das bei ihrer Berechnung verwendete Windfeld gut geeignet ist, zeigt sich in den Abb. 7.43 und 7.44, wo die relativen Fehler der Simulation unter Verwendung eines anderen Windfelds (2) mit doppelt so hoher mittlerer Windgeschwindigkeit und Turbulenzintensität dargestellt sind. Auch hier weist die Karhunen-Loève Basis eine hohe Approximationsgüte auf, was zeigt, daß die KL-Basis nicht für jede zu untersuchende Windklasse, sondern nur bei Änderung der betrachteten Rotorblätter neu berechnet werden muß. Die Mittelwerte der Fehler sind ebenfalls in Tabelle 7.5 zu finden.

Abschließend sind in Abb. 7.45 die Ergebnisse der postprocessed Galerkin-Methode zusammen mit den Ergebnissen der normalen Galerkin Methode für den relativen Feh-

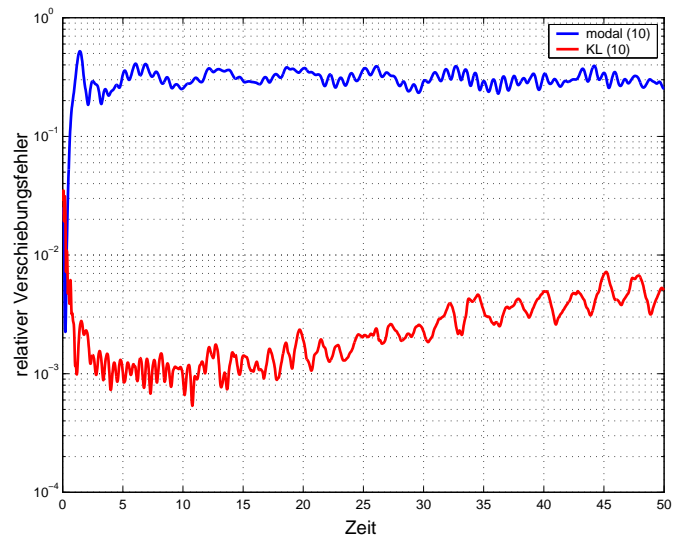


Abbildung 7.41 Zeitverläufe des Verschiebungsfehlers, Windfeld 1.

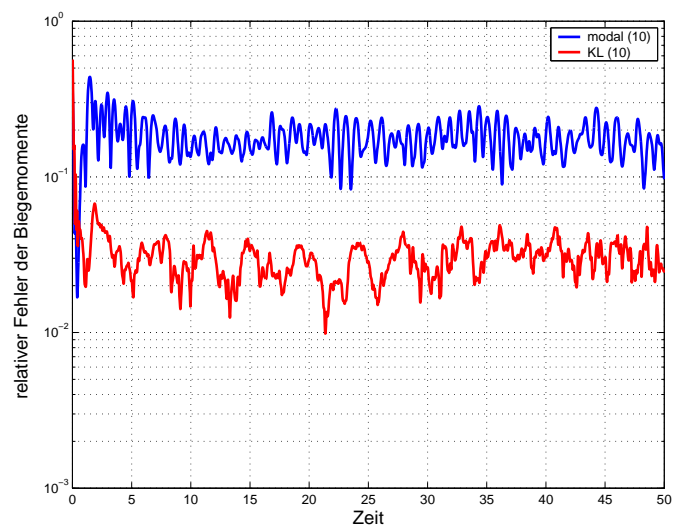


Abbildung 7.42 Zeitverläufe des Biegemomentenfehlers, Windfeld 1.

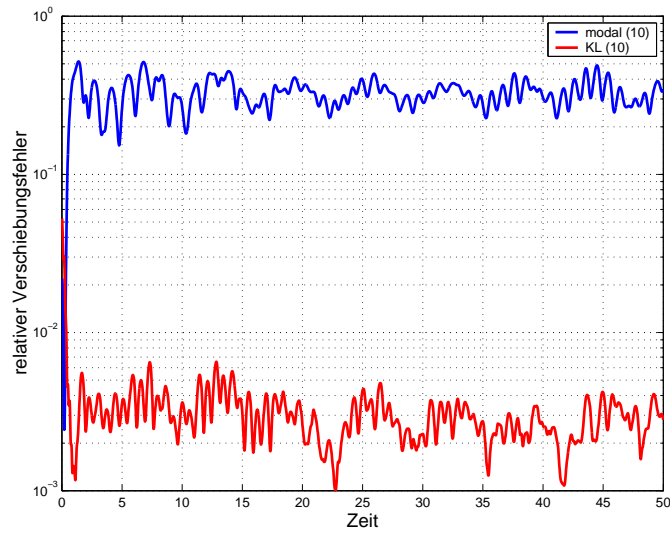


Abbildung 7.43 Zeitverläufe des Verschiebungsfehlers, Windfeld 2.

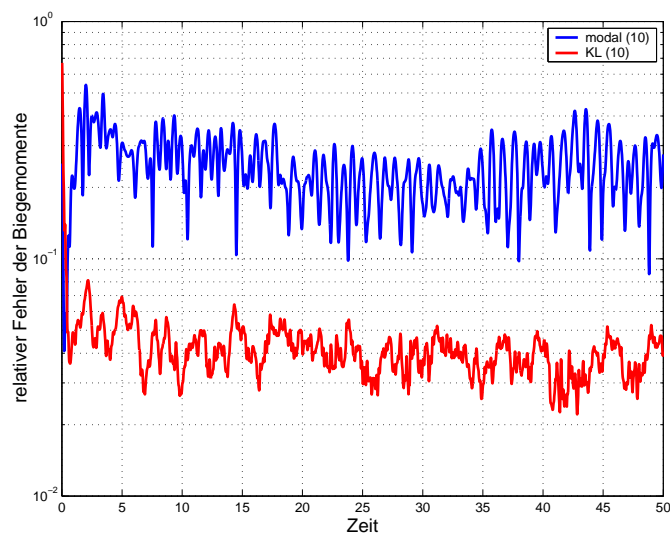


Abbildung 7.44 Zeitverläufe des Biegemomentenfehlers, Windfeld 2.

Tabelle 7.5 Mittelwerte der relativen Fehler

	Verschiebungen	Biegemomente
Windfeld (1) modale Basis	0.3044	0.1785
Windfeld (1) KL-Basis	0.0026	0.0311
Windfeld (2) modale Basis	0.3244	0.2436
Windfeld (2) KL-Basis	0.0032	0.0426

ler der Biegemomente dargestellt. Der relative Fehler der Verschiebungen wird wie in Abschnitt 7.1.6 nicht signifikant verringert. Zur Reduktion wurden 10 und 15 Primärbasisvektoren verwendet, und alle übrigen Basisvektoren wurden als Sekundärbasisvektoren verwendet. Bei beiden Basen kann eine Verbesserung der Approximationsgüte festgestellt werden. Der Aufwand dieser Verbesserung ist wie oben beschrieben nur eine Matrix-Vektormultiplikation auf Ebene jeder Substruktur.

Auch die Methode zur Berechnung von Fehlerindikatoren zur Selektion einer effizienten niedrigdimensionalen Basis läßt sich ohne Veränderung auf das Gesamtsystem übertragen. In Abb. 7.46 sind beispielhaft die Fehlerindikatoren für die modale Basis für Turm und Rotorblätter dargestellt. Als Zielfunktional dient dabei die Verschiebung des Turmkopfes in Windrichtung. Wählt man als Basis die mittels des Fehlerindikators selektierten Basisvektoren, wird der relative Fehler zum Beispiel bei der Verwendung von 10 Basisvektoren für Turm und Rotorblätter um den Faktor 3.6 verringert.

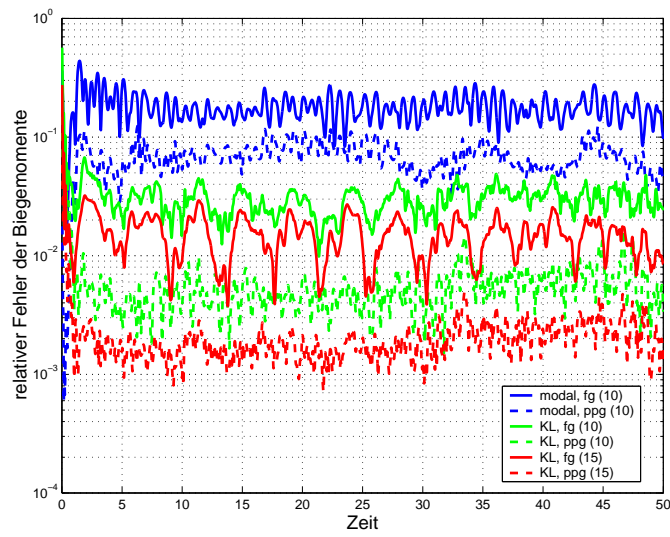


Abbildung 7.45 Zeitverläufe des relativen Fehlers der Biegemomente für die normale (fg) und postprocessed (ppg) Galerkin Methode.

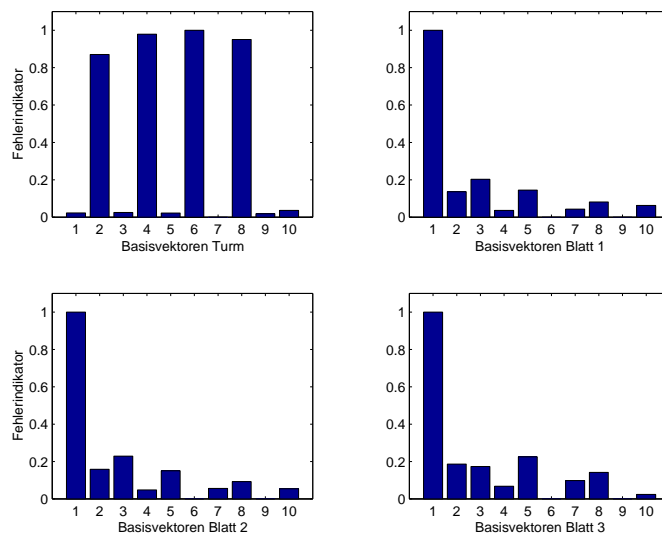


Abbildung 7.46 Fehlerindikatoren für die Subsysteme.

### 7.3 Analyse der Effizienz

Abschließend soll die Effizienz der Modellreduktion für die Simulation der Langzeitdynamik untersucht werden. Die Effizienz sei im folgenden definiert als

$$\text{Effizienz} = \frac{a_{nr}}{a_r} \cdot \text{Güte.} \quad (7.50)$$

Hierbei bezeichnet  $a_{nr}$  den für das nicht reduzierte und  $a_r$  den für das reduzierte Modell benötigten Rechenaufwand. Die Güte der Approximation sei durch den zeitlichen Mittelwert des relativen Fehlers der Biegemomente in Prozent definiert, Güte =  $100 - (E\{e_{mb,m}\}$  in %). Der Rechenaufwand kann entweder durch die benötigte Anzahl von Rechenoperationen, im Englischen mit „flops“ bezeichnet, oder die benötigte Zeitdauer der Berechnung charakterisiert werden. Hierbei sind zwei Anteile zu berücksichtigen, der Aufwand zur Generierung der Basisvektoren und der Aufwand pro Zeitschritt.

#### 7.3.1 Setup-Aufwand

Beim Rechenaufwand zur Generierung der reduzierten Basis gilt für die drei untersuchten Basen, daß die Lanczos-Vektoren mit vergleichsweise geringem Aufwand zu erzeugen sind: Zunächst muß ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Startvektors gelöst werden. Daran anschließend sind nur Matrix-Vektor Multiplikationen zuzüglich der Orthonormalisierung durchzuführen. Aufwendiger ist die Erzeugung der modalen Basis. Bei Problemen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden wird meist ein iterativer Eigenwert-Löser verwendet [164], bei dem zur Berechnung eines Eigenvektors ungefähr der Aufwand notwendig ist, um die gesamte Lanczos-Basis zu erzeugen. Die Generierung der Karhunen-Loeve Basis ist noch aufwendiger, da hierfür zunächst die Lösung des nicht reduzierten Systems für eine gewisse Zeitspanne berechnet werden muß, um dann ein Eigenwert-Problem niedriger Dimension zu lösen. Betrachtet man als Beispiel ein einzelnes Rotorblatt, ist in Tabelle 7.6 die numerisch bestimmte Anzahl der Rechenoperationen zur Berechnung von jeweils 20 Basisvektoren aufgeführt. Dabei ist die Anzahl der Rechenoperationen zur Berechnung der Lanczos Basis zur Normalisierung verwendet worden. Da die Anzahl der die Substruktur beschreibenden Variablen verhältnismäßig gering ist, ist die Differenz des Aufwandes zwischen modaler Basis und Karhunen-Loève Basis hier nicht sehr groß. Dieser Abstand steigt mit zunehmender Problemgröße an.

Vergleicht man die mittels der verschiedenen Basen erzielte Effizienz als Funktion der Zeitschritte bei einem konstanten Rechenaufwand pro Zeitschritt, beispielhaft dargestellt in Abb. 7.47, so erkennt man, daß schon nach einer geringen Zahl von Zeitschritten die Effizienz der Karhunen-Loève Basis höher ist als die der anderen Basen, da mit der KL Basis eine sehr hohe Approximationsgüte erzielt werden kann. Ab einem bestimmten Zeitpunkt wird dadurch der höhere Aufwand für die Berechnung der Basisvektoren wettgemacht.



Tabelle 7.6 Aufwand zur Erzeugung der Basen

Basis	benötigter Rechenaufwand für 20 Basisvektoren	Mittelwert des relativen Fehlers
Lanczos Basis	1	13.2 %
modale Basis	19.91	23.8 %
Karhunen-Loève Basis	27.5	0.2 %

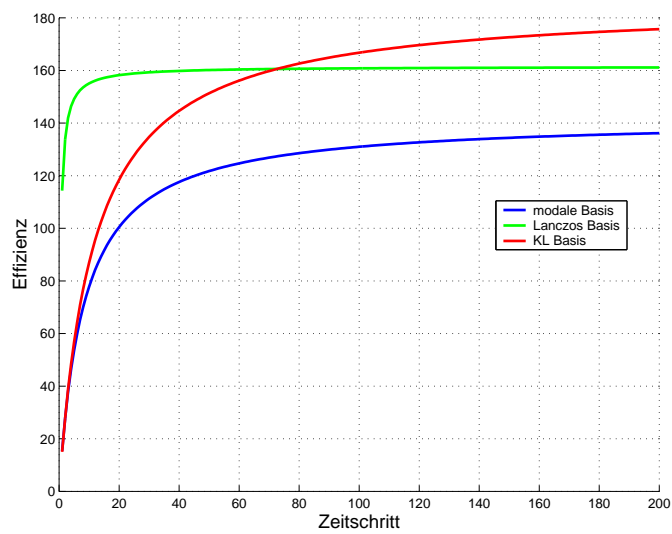


Abbildung 7.47 Effizienz der Basen als Funktion des Zeitschritts.

Tabelle 7.7 Vergleich des Rechenaufwands eines Zeitschritts.

Operation	Aufwand (unreduziert)	Aufwand (reduziert)
Transformation des Residuums	entfällt	$O(dm)$
Transformation der eff. Steifigkeitsmatrix	entfällt	$O(dm^2)$
Dreieckszerlegung der eff. Steifigkeitsmatrix	$O(b^2d)$	$O(m^3)$
Lösung für eine rechte Seite	$O(bd)$	$O(m^2)$
Rücktransformation des Lösungsvektors	entfällt	$O(dm)$

### 7.3.2 Aufwand der Zeitintegration

Zunächst soll der Rechenaufwand für einen Zeitschritt theoretisch analysiert werden. Dabei wird das Newmark-Verfahren zur Zeitintegration verwendet, das Newton-Raphson Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems und ein direkter Löser zur Lösung des linearen Gleichungssystems pro Iterationsschritt. In Tabelle 7.7 ist der benötigte Rechenaufwand zur Zeitintegration eines FE-Modells mit  $d$  Freiheitsgraden aufgeführt [160]. Mit  $b$  wird die Bandbreite der effektiven Steifigkeitsmatrix bezeichnet.  $m$  steht für die Anzahl der für das reduzierte Modell verwendeten Basisvektoren. Man erkennt, daß mit zunehmender Dimension  $d$  die Lösung des linearen Gleichungssystems pro Iterationsschritt anteilig den größten Rechenaufwand benötigt. Analysiert man den Rechenaufwand des reduzierten Problems mit  $m$  Basisvektoren, so erkennt man potentielle Einsparmöglichkeiten in dem Fall, daß  $d \gg m$  gilt. In REMKE und ROTHERT [160] ist für verschiedene Werte von  $d$ ,  $b$  und  $m$  der Rechenaufwand bestimmt worden: Der Quotient der benötigten Rechenoperationen des ohne und mit Reduktion berechneten Modells liegt zwischen 2 und 9 und hängt stark von der Bandbreite der effektiven Steifigkeitsmatrix ab.

Die theoretisch gewonnenen Aussagen zeigen sich auch bei einer Analyse des Rechenaufwandes bei Modellen der Windkraftanlage mit zunehmender Anzahl von Freiheitsgraden. Betrachtet man den Aufwand zur Lösung des linearen Gleichungssystems in jedem Zeitschritt, so zeigt sich, daß schon bei einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden der Quotient von Zeitaufwand als auch Rechenaufwand für die Lösung des reduzierten Systems geteilt durch Aufwand beim nicht reduzierten System, dargestellt in Abb. 7.48, unterhalb von 10 % liegt. Mit zunehmender Dimension sinkt der Quotient weiter, da der Aufwand beim reduzierten Modell nahezu konstant ist. Turm und Rotorblätter sind dabei beim reduzierten Modell mit jeweils 10 Basisvektoren beschrieben und es wird für beide Probleme ein direkter Gleichungslöser verwendet. In den Fällen, bei denen der Aufwand zur Lösung des linearen Gleichungssystems den Gesamtaufwand der Simulation dominiert, ist allein durch Anwendung der projektionsbasierten Modellreduktion somit eine signifikante Effizienzsteigerung möglich.

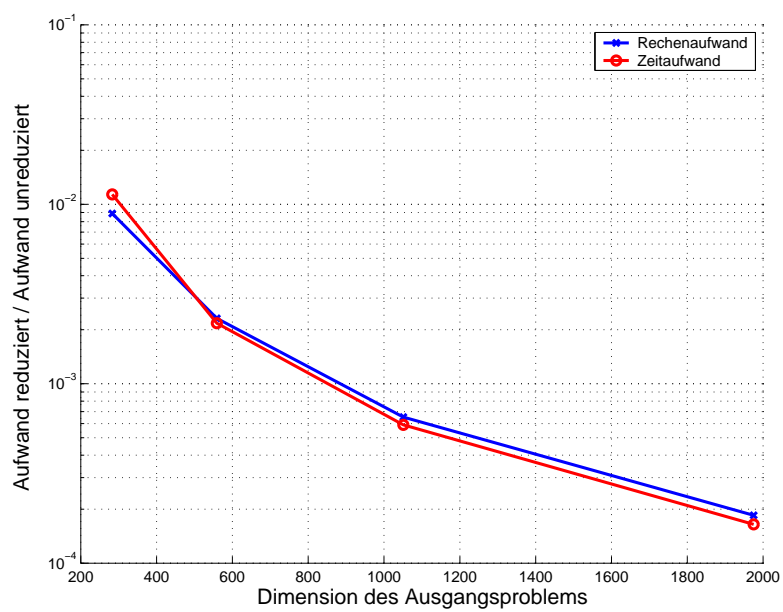


Abbildung 7.48 Vergleich des Aufwands.



## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Simulation der aeroelastischen Wechselwirkungen von Windkraftanlagen. Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt dabei auf der Anwendung der projektionsbasierten Modellreduktion zur Steigerung der Effizienz von Langzeitsimulationen. Es wird dazu ein mathematisches Modell der Windkraftanlage aufgestellt. Turm und Rotorblätter werden als geometrisch nichtlineare Balken modelliert, um auch große Deformationen beschreiben zu können. Die Auslenkungen der Rotorblätter werden in einem rotierenden System beschrieben, um Starrkörper-Rotationen und elastische Verformungen voneinander zu trennen. Das erhöht die numerische Robustheit des Modells, vermeidet Stabilitätsprobleme und hohe algorithmische Dämpfung bei der Zeitintegration und ermöglicht die einfache Anwendung der Modellreduktion auf Substruktur-Ebene. Die aerodynamischen Lasten werden durch die Blattelement-Impulstheorie beschrieben. Die Strömung wird dabei in einen globalen Anteil, den Nachlauf, und einen lokalen Anteil, die zweidimensionale Strömung an den Profilschnitten der Rotorblätter, aufgeteilt. Zur Einbeziehung lokaler instationärer Effekte wird ein Dynamic Stall Modell verwendet, das als Differentialgleichungssystem formuliert ist.

Die im Raum mittels der Methode der Finiten Elemente diskretisierten Modellgleichungen werden durch Anwendung der projektionsbasierten Modellreduktion in einen niedrig-dimensionalen Unterraum projiziert, wodurch eine effiziente Beschreibung der Systemdynamik möglich ist. Als Basis werden die modale Basis, die Lanczos Basis und die Karhunen-Loève Basis verwendet. Hierbei zeigt sich, daß trotz des hohen Aufwandes für ihre Generierung die Karhunen-Loève Basis am Besten dafür geeignet ist, einen effizienten niedrig-dimensionalen Unterraum zur Beschreibung des aeroelastischen Systems aufzuspannen. Auch eine Reduktion der aerodynamischen Freiheitsgrade des Dynamic Stall Modells ist mit dieser Basis ohne weiteres möglich. Um die Effizienz des niedrig-dimensionalen Unterraums zu verbessern, wird die „dual-weighted-residual“ Methode zur Abschätzung des durch die Modellreduktion hervorgerufenen Fehlers verwendet. Damit ist es möglich, einen auf ein Funktional der Lösung angepassten Unterraum zu generieren, in dem das gewählte Funktional mit hoher Genauigkeit approximiert wird.

Eine weitere Methode zur Verringerung des Approximationsfehlers wird mit der nicht-linearen bzw. postprocessed Galerkin Methode vorgestellt. Sie kann vereinfacht als Erweiterung der Methode der statischen Korrektur auf nichtlineare Probleme angesehen

werden und ermöglicht die Verbesserung der Approximation von abgeleiteten Größen wie inneren Kräften und Momenten. Anhand der Simulation der Bewegung eines einzelnen Rotorblatts wird die Anwendung aller vorgestellten Verfahren ausführlich erläutert sowie die erzielten Ergebnisse bewertet. Es zeigt sich, daß durch die Anwendung der projektionsbasierten Modellreduktion und Verwendung der Karhunen-Loève Basis eine sehr effiziente niedrig-dimensionale Beschreibung des aeroelastischen Systems der Windkraftanlage möglich ist. Durch die Reduktion des Gesamtsystems der Windkraftanlage mit ca. 1000 Struktur-Freiheitsgraden auf ein reduziertes System mit 40 generalisierten Freiheitsgraden kann eine Approximationsgenauigkeit erzielt werden, deren Fehler bei den untersuchten Größen unter 1% liegt. Auch die zusätzliche Reduktion der aerodynamischen Freiheitsgrade von ca. 700 auf 90 generalisierte Freiheitsgrade erhöht den Fehler auf nicht mehr als 5 %.

Als zukünftige Verbesserung des in dieser Arbeit entwickelten mathematischen Modells der Windkraftanlage ist die Einbeziehung eines detaillierten, kontinuumsbasierten Nachlaufmodells [133] notwendig. Bei diesem Modell ist die Anwendung der Modellreduktion unter Verwendung der Karhunen-Loève Basis gut dazu geeignet, den derzeit hohen Rechenaufwand dieser Nachlaufmodelle signifikant zu verringern und damit ihren Einsatz im industriellen Umfeld zu ermöglichen. Eine weitere Verbesserung besteht in der Einbeziehung von Wellenlasten auf den Turm, um dem derzeitigen Trend zu offshore installierten Windkraftanlagen gerecht zu werden. Ein anderes Problem, das bisher noch nicht ausreichend untersucht worden ist, liegt in der Notwendigkeit, trotz Reduktion das gesamte nichtlineare Modell zur Berechnung der Kraftvektoren auswerten zu müssen. Es gibt erste Ansätze, einfachere nichtlineare Darstellungen des Systems zu ermitteln [150], hier ist jedoch weiterer Forschungsbedarf notwendig.

# A Instationäre Effekte zweidimensionaler Strömung

Zur Vervollständigung der in Kapitel 2 beschriebenen Modellierung der am Profilschnitt wirkenden aerodynamischen Lasten soll an dieser Stelle auf die Modellierung der instationären Effekte eingegangen werden. Die konventionelle Blattelement-Theorie nimmt an, daß Änderungen des Anstellwinkels so langsam erfolgen, so daß sich zu jedem Zeitpunkt ein Gleichgewicht der Strömung einstellen kann. Diese Näherung ist nur für eine geringe Instationarität der Strömung zulässig. Um die Instationarität einer Strömung quantitativ zu beschreiben, definiert man einen dimensionslosen Parameter, Strouhal-Zahl genannt,

$$St = \frac{l f_p}{V_\infty}. \quad (\text{A.1})$$

Dabei bezeichnet  $f_p$  die Frequenz der periodischen Änderung, zum Beispiel des Anstellwinkels,  $l$  eine charakteristische Länge und  $V_\infty$  eine charakteristische Strömungsgeschwindigkeit. Oft wird auch die dimensionslose, „reduzierte“ Frequenz

$$k = 2\pi St \quad (\text{A.2})$$

verwendet. Die instationären Effekte, als durchgezogene rote Kurven in Abb. A.1 beispielhaft für den Normalkraft-Beiwert für Profilschwingungen um drei verschiedene Mittelwerte des Anstellwinkels  $\alpha$  dargestellt, sind in den Bereichen vor, während und nach dem Strömungsabriß unterschiedlich stark ausgeprägt und werden in den folgenden Abschnitten kurz beschrieben.

## Instationäre Effekte bei anliegender Strömung

Im Bereich geringer Anstellwinkel kann mit der linearen Potentialtheorie eine gute Approximation der Strömungsverhältnisse erzielt werden. Der Strömungszustand wird beschrieben durch eine anliegende Strömung und einen sinusförmigen Nachlauf. Dieser oszillierende Nachlauf aus Anfahr- und Stopwirbeln ist verantwortlich für eine Zeitverzögerung der aerodynamischen Lasten. Dadurch entsteht eine Hysterese-Kurve, die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, siehe Abb. A.1, Bereich (1).

Für diesen Bereich sind analytische Lösungen berechenbar: Die erste analytische Beschreibung instationärer aerodynamischer Lasten geht auf BIRNBAUM [21], WAGNER [200], THEODORSEN [192] und KÜSSNER [110, 111] zurück, welche eine angeströmte ebene Platte untersuchen, die harmonische Hub- und/oder Drehschwingungen ausführt. Die Untersuchungen zeigen, daß die aerodynamischen Lasten aufgeteilt werden können in einen nicht-zirkulatorischen Anteil und einen von der reduzierten Frequenz abhängigen zirkulatorischen Anteil, gegeben durch die Theodorsen-Funktion. Sie reicht bei anliegender Strömung zur Beschreibung der instationären Effekte aus, was durch Vergleiche der Ergebnisse von Theodorsen mit numerischen Lösungen der Euler-Gleichungen verifiziert werden konnte [135]. Das Analogon zur Theodorsen-Funktion im Frequenzbereich ist die Wagner-Funktion im Zeitbereich, welche man durch Fourier-Transformation der Theodorsen Funktion erhält [62]. Die Wagner-Funktion beschreibt die Antwort der aerodynamischen Lasten auf eine sprungförmige Änderung des Anstellwinkels. Die Küssner-Funktion [111] hingegen beschreibt den Einfluß einer Böe, die senkrecht zur Profillehne angreift, auf die aerodynamischen Lasten. Wenn das Profil Starrkörperbewegungen ausführt, zeigen die analytischen Lösungen der oben genannten Autoren, daß der Zeitverlauf des Auftriebs nur von den Komponenten der Anströmung am 3/4-Punkt des Profils abhängt. Der Auftrieb greift dagegen gemäß Definition am 1/4-Punkt an. Hieraus erklärt sich die besondere Bedeutung dieser beiden Punkte auf der Profillehne.

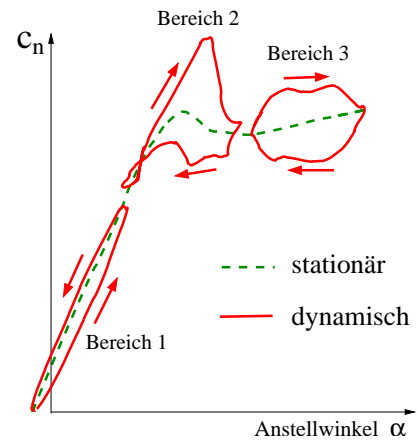


Abbildung A.1 Verlauf des stationären und instationären Normalkraft-Beiwerts, aus [197]

### Instationäre Effekte beim Strömungsabriß

Verglichen mit Bereich (1) sind die physikalischen Phänomene im Anstellwinkelbereich (2), wo sich die Strömung abzulösen beginnt, komplexer. Da ein Großteil des Rotorblatts hauptsächlich im Anstellwinkelbereich (2) operiert, bedarf er sorgfältiger Untersuchung und Modellierung. Es kommt hier zum Phänomen des „dynamic stall“, bei dem im Unterschied zu den Bereichen (1) und (3) sehr starke Einflüsse der Instationarität auf die aerodynamischen Lasten auftreten [132, 152]. Dementsprechend wichtig ist ein Verständnis der Vorgänge in diesem Bereich. Im Übersichtsartikel von MCCROSKEY [132] sind den einzelnen Punkten auf der in Abb. A.2 dargestellten instationären Beiwertkurven die in Tabelle A.1 beschriebenen Strömungszustände zugeordnet: Während der Anstellwinkel über den stationären Stallwinkel erhöht wird, beginnt sich ein Wirbel in der Nähe



Tabelle A.1 Zuordnung von Strömungszuständen zur instationären Beiwertkurve.

Punkt	Strömungszustand (siehe Abb. A.2)
1	Dünne, anliegende Grenzschicht
2	Strömungsumkehr in der Grenzschicht tritt auf
3	Ein Wirbel löst sich ab und bewegt sich über die Oberfläche des Profils
4	Der Wirbel erreicht die Profilhinterkante
5	Effekte eines zweiten Wirbels
6	Wiederanlegen der Strömung, beginnend an der Vorderkante

der Vorderkante zu bilden. Der Wirbel löst sich von der Vorderkante und wird über die Profiloberseite nach hinten transportiert, resultierend in einer starken Erhöhung des Auftriebs. Die Höhe der Auftriebsvergrößerung hängt von der Größe des Wirbels und seinem Abstand zur Profiloberseite ab. Die Bewegung des Wirbels mit der Strömung hängt von der Profilgeometrie und der Pitch-Rate ab. Wenn der Wirbel an der Hinterkante vorbei transportiert wird, nimmt das Moment kurzfristig einen hohen Wert an, dann fallen Auftrieb und aerodynamisches Moment stark ab. Die Strömung bleibt so lange abgelöst, bis sich der Anstellwinkel genügend verringert hat, so daß sich die Strömung wieder anlegen kann.

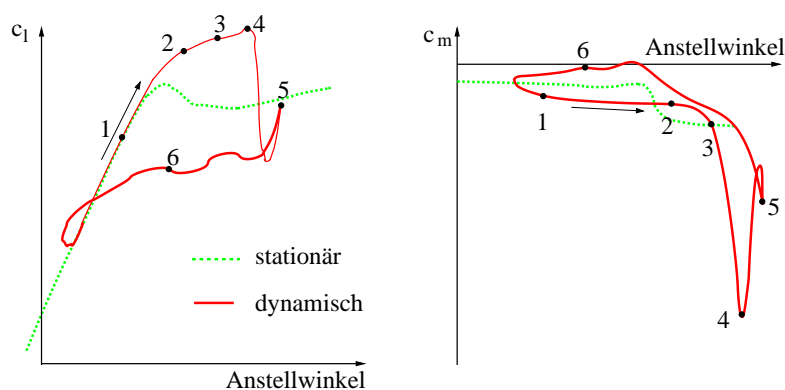


Abbildung A.2 Verlauf des instationären Auftriebs- und Momentenbeiwerts über dem Anstellwinkel aus [132]

### Instationäre Effekte nach dem Strömungsabriß

Im letzten für die Windkraftanlage relevanten Anstellwinkel-Bereich (3) kommt es zu massiver Ablösung der Strömung. Die Instationarität äußert sich in einer Hysterese-

Kurve, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die vorherrschende Kraft ist der Widerstand. Zusätzlich entstehen aperiodische Kräfte aufgrund von Wirbelablösungen.

## A.1 Modellierung aerodynamischer Beiwerte

Für die Simulation der aerodynamischen Lasten im Zeitbereich benötigt man ein Modell, mit dem sich die instationären Effekte der zweidimensionalen Profilströmung qualitativ und quantitativ beschreiben lassen. Dieses Modell darf nicht zu rechenaufwendig sein, da Langzeitsimulationen durchzuführen sind. Aufgrund dessen kann der Ansatz, die Strömung durch die Navier-Stokes Gleichungen zu modellieren, nicht verwendet werden. Eine andere Herangehensweise aus dem Bereich der Hubschrauber-Simulation verwendet semi-empirische Modelle der instationären aerodynamischen Lasten, Dynamic Stall Modelle genannt. Auch für den Bereich der Windturbinen wurden solche Modelle entwickelt. Beispiele aus dem Hubschrauber-Bereich sind das Modell von LEISHMANN und BEDDOES [120], das ONERA- [146] und DLR-MODELL [197] und die Modelle von GOMAN und KHRABROV [72] sowie TRUONG [195]. Im Windturbinen-Bereich sind die Modelle von ØYE [142] und das RISØ-MODELL [158] zu finden. Von SNEL [183] wurde eine Adaptierung des TRUONG-Modells für Windturbinen vorgestellt.

Für den Windturbinen-Bereich stellt man folgende Anforderungen an das Dynamic Stall Modell:

1. Es muß im linearen Bereich mit den durch die Theodorsen-Funktion gegebenen analytischen Ergebnissen übereinstimmen.
2. Es muß für den gesamten Anstellwinkelbereich  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefern.
3. Die stationäre Kurve muß für geringe reduzierte Frequenzen korrekt wiedergegeben werden, anpassbar auf das verwendete Profil.
4. Es muß die Hysterese-Kurven im kritischen Bereich (2) qualitativ und quantitativ richtig wiedergeben, die Anpassung an Meßergebnisse muß möglich sein.
5. Die Herleitung muß physikalisch motiviert sein, um bei einer Interpolation zwischen verschiedenen Parametersätzen für unterschiedliche Profilgeometrien sinnvolle Ergebnisse zu erhalten.
6. Zur Durchführung von Sensitivitäts- und Stabilitätsuntersuchungen ist eine Modellierung als System von Differentialgleichungen wünschenswert.

Die Evaluierung [147] der Dynamic Stall Modelle aus dem Hubschrauber-Bereich empfiehlt die Verwendung des ONERA- oder DLR-MODELLS, da sie die Meßergebnisse sehr gut wiedergeben. Aus diesem Grund soll das DLR-MODELL im folgenden als Basis für

die Berechnung der aerodynamischen Lasten dienen. Es geht auf Arbeiten von BEDDOES [16], LEISHMAN und BEDDOES [119], sowie LEISS und WAGNER [122] zurück und wurde von VAN DER WALL [197] in seiner jetzigen Form entwickelt. Ausgangspunkt der Modellierung sind die Verläufe der stationären Beiwerte des betrachteten Profils für Auftrieb, Widerstand und aerodynamisches Moment abhängig vom Anstellwinkel. Sie können entweder durch Messungen im Windkanal oder numerische Berechnungen erhalten werden. Ein erster Schritt besteht darin, die experimentell erhaltenen Beiwert-Kurven durch die Anpassung von freien Parametern der im folgenden beschriebenen analytischen Funktionen möglichst genau zu approximieren. Das kann per Hand, besser jedoch durch die Verwendung von deterministischen oder evolutionären Parameter-Optimierungsverfahren geschehen. Daran anschließend erfolgt die Modellierung der instationären Effekte, bei der gemäß der Lösung eines dynamischen Systems die Parameter der analytischen Funktionen verändert werden, um die Abweichungen der instationären Beiwertkurven von den stationären Verläufen zu approximieren. Von Vorteil ist hier die Tatsache, daß für den linearen Bereich mit Wagner- und Küssner-Funktion analytische Lösungen zur Verfügung stehen und im Stall-Bereich die Form der instationären Kurven nicht signifikant von den Parametern der Bewegung wie reduzierter Frequenz, mittlerem Anstellwinkel, Amplitude der Schwingung, Anströmgeschwindigkeit, Bewegungsart und sogar Profilform abhängen [16].

## A.2 Beschreibung der stationären Beiwerte

Das im folgenden vorgestellte Modell arbeitet nicht mit den Beiwerten für Auftrieb und Widerstand, sondern einem Normalkraft-Beiwert  $c_n$  senkrecht zur Profilhne und einem Tangentialkraft-Beiwert  $c_t$  parallel zur Sehne, welche durch eine Rotation um den Anstellwinkel  $\alpha$  berechnet werden,

$$c_t = c_a \sin(\alpha) - c_w \cos(\alpha), \quad (\text{A.3})$$

$$c_n = c_a \cos(\alpha) + c_w \sin(\alpha). \quad (\text{A.4})$$

Die stationären Profilbeiwerte werden bei konstanter Anströmgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{stat}$  gemessen. Die dimensionslosen Komponenten dieser Geschwindigkeit im Profilkordinatensystem sind

$$\nu_x = \nu \cos(\alpha), \quad (\text{A.5})$$

$$\nu_z = \nu \sin(\alpha), \quad (\text{A.6})$$

mit  $\nu = ||\mathbf{v}_{stat}||/v_{ref}$ . Hierbei ist  $v_{ref}$  eine passend gewählte Referenzgeschwindigkeit.

Das mathematische Modell zur Darstellung der Beiwerte  $c_n$ ,  $c_t$  und  $c_m$  besteht aus der Superposition von verschiedenen analytischen Funktionen, die Anteile der abgelösten und anliegenden Strömung beschreiben. Das ist beispielhaft dargestellt in Abb. A.3 für den Normalkraft-Beiwert.

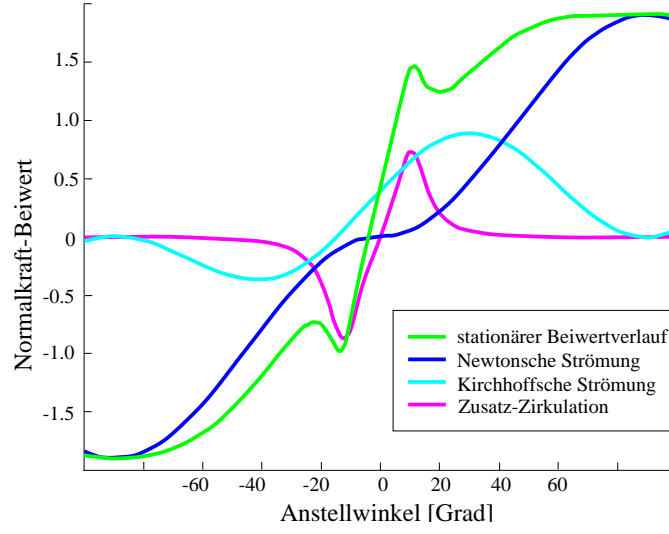


Abbildung A.3 Stationärer Verlauf von  $c_n$  als Überlagerung von analytischen Funktionen.

Der Beiwert wird als Summe der analytischen Funktionen dargestellt,

$$c_k(\nu_x, \nu_z, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^4 c_{k,i}(\nu_x, \nu_z, \mathbf{p}), \quad k = t, n, m. \quad (\text{A.7})$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{p}$  den Vektor der an die Meßergebnisse anzupassenden Parameter. Die vier Funktionen  $c_{k,i}$  sind dabei wie folgt definiert:

1. Die erste Funktion beschreibt den Beitrag der Newtonschen Verdrängungsströmung bei vollständig abgelöster Strömung,

$$\begin{aligned} c_{t,1} &= 0, \\ c_{n,1} &= p_{n1} \frac{\nu_z |\nu_z|}{\nu^2}, \\ c_{m,1} &= -p_{m1} \frac{\nu_z |\nu_z|}{\nu^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

2. Die zweite Funktion basiert auf der Kirchhoffschen Potentialtheorie bei hohen Anstellwinkeln,

$$\begin{aligned} c_{t,2} &= 0, \\ c_{n,2} &= p_{n2} \frac{(\nu_z - p_{n3}) \nu_x^2}{\nu^3}, \\ c_{m,2} &= -p_{m2} \frac{(\nu_z - p_{m3}) \nu_x^2}{\nu^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

3. Die dritte und wichtigste Funktion beschreibt den Beitrag einer zusätzlichen Zirkulation bei niedrigen Anstellwinkeln,

$$c_{k,3} = c_k^{hk+} + c_k^{hk-} + c_k^{vk+} + c_k^{vk-}. \quad (\text{A.10})$$

Hier bezeichnen die ersten beiden Anteile den Beitrag der Hinterkantenablösung und die anderen zwei Anteile den Beitrag der Vorderkantenablösung, jeweils getrennt für positive (+) und negative (−) Anstellwinkel. Für die Hinterkantenablösung besteht der Beiwert aus einer sogenannten Normfunktion  $\Gamma$  mit einem Maximum von Eins bei einem Anstellwinkel, der dem Stallpunkt in etwa entspricht,

$$c_k^{hk+} = \frac{|\nu_x|}{\nu^2} p_{k4}^+ p_5^+ \Gamma_k^{hk+}. \quad (\text{A.11})$$

Die normierte Zirkulationsfunktion lautet

$$\Gamma_k^{hk+} = \frac{p_{k6}^+}{p_{k6}^+ + (\nu_z - p_5^+)^2}. \quad (\text{A.12})$$

Der Stall bei negativen Anstellwinkeln wird auf gleiche Weise beschrieben. Als weiterer Anteil ist der Zirkulationsanstieg durch Vorderkantenablösung  $c_k^{vk}$  zu beschreiben. Hier entsteht eine laminare Blase an der Vorderkante, welche die lokale Profildröbung erhöht und damit den Auftrieb steigen läßt. Beim Platzen dieser Blase entsteht dann ein abrupter Auftriebsverlust. Dies wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$$c_k^{vk+} = \frac{|\nu_x|}{\nu^2} p_{k7}^+ p_5^+ \Gamma_k^{vk+} \quad (\text{A.13})$$

mit der die Zusatzzirkulation der laminaren Blase beschreibenden Funktion

$$\Gamma_k^{vk+} = \frac{\nu_z - p_{k8}^+}{|p_{k9}^+ - p_{k8}^+|} \frac{p_{k10}^+}{p_{k10}^+ + (\nu_z - p_{k9}^+)^2} \quad (\text{A.14})$$

Gegebenenfalls ist der positive Stall ohne und der negative Stall mit dieser Funktion zu modellieren.

4. Die vierte Funktion gibt den Beitrag einer Wirbelablösung im Stall-Bereich wieder: Nach Einsetzen der Strömungsablösung bis zum Wideranlegen werden aperiodische Kräfte und Momente durch von der Vorderkante ablösende Wirbel verursacht, deren Stärke und Ablösefrequenz stochastischen Schwankungen unterliegt. Dieser Anteil wird derzeit vernachlässigt.

### A.3 Einbeziehung instationärer Effekte

Um das im vorigen Abschnitt vorgestellte analytische Modell der stationären Beiwerte um die Beschreibung der instationären Effekte zu erweitern, werden gemäß der Wagner-Funktion  $W$  und der Küssner-Funktion  $K$  die Komponenten  $\nu_x$  und  $\nu_z$  der dimensionslosen Anströmgeschwindigkeit zu effektiven Größen  $\nu_x^{eff}$  und  $\nu_z^{eff}$  verändert, um damit die Hysterese in den Beiwert-Verläufen zu modellieren [197]. Das Überschießen der Beiwerte im Stall-Bereich wird durch die Veränderung des Parameters  $p_5$  zum effektiven Parameter  $p_5^{eff} = p_5 + \Delta p$  mittels einer semi-empirisch erhaltenen Stall-Funktion  $S$  modelliert. Während die Berechnung der effektiven Größen im DLR-Modell mittels einer Diskretisierung des Duhamel-Integrals durchgeführt wird [197], beschreibt die folgende Darstellung die Berechnung der effektiven Größen durch die Lösung eines Differentialgleichungssystems. Das ist vorteilhaft, wenn Stabilitäts- und Sensitivitätsuntersuchungen des aeroelastischen Systems durchgeführt werden sollen.

Für die folgenden Berechnungen werden folgende Näherungen

$$W(\tau) = 1 - 0.165e^{-0.0455\tau} - 0.335e^{-0.3\tau} \quad (\text{A.15})$$

für die Wagner- [99] beziehungsweise

$$K(\tau) = 1 - 0.5e^{-0.13\tau} - 0.5e^{-\tau} \quad (\text{A.16})$$

für die Küssner-Funktion [119] verwendet. Hierbei ist  $\tau$  eine dimensionslose Zeitvariable, definiert durch

$$\tau = \frac{2V_\infty}{c}t \quad (\text{A.17})$$

mit der Sehnenlänge  $c$  des betrachteten Profils. Für den Stall-Bereich findet analog zu BEDDOES [16] ein Dgl.-System 1. Ordnung Verwendung, so daß die Antwort des Systems dieselbe Frequenz wie die Anregung aufweist,

$$S(\tau) = 1 - A_s e^{-b_s \tau}. \quad (\text{A.18})$$

Der Koeffizient, der die Zeitverzögerung beschreibt, wurde in [197] zu  $b_s = 0.26$  bestimmt, für  $A_s$  wird dort der Wert  $A_s = 1$  vorgeschlagen.

Die Funktionen  $W(\tau)$ ,  $K(\tau)$  und  $S(\tau)$  stellen aus der Sichtweise der Regelungstechnik Sprungantworten des aerodynamischen Systems für unterschiedliche Eingangsgrößen dar. Das Vorgehen zur Überführung von  $W(\tau)$ ,  $K(\tau)$  und  $S(\tau)$  in die Form von Differentialgleichungen, in der Regelungstechnik als Zustandsraumdarstellung bezeichnet, wird in LEISHMAN [121] und POIREL [153] beschrieben. Eine allgemeine Übersicht über die zugrunde liegenden Begriffe der Regelungstechnik und die Umformung einer Übertragungsfunktion im Frequenzbereich in die Zustandsraumdarstellung findet sich zum Beispiel bei FÖLLINGER [56]. Geht man von einer Sprungantwort  $W(t)$  im Zeitbereich

$$W(t) = \begin{cases} 1 - A_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - A_2 e^{-\frac{t}{T_2}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

durch Laplace-Transformation in den Frequenzbereich über, erhält man

$$W(s) = \frac{1}{s} - \frac{A_1}{s + \frac{1}{T_1}} - \frac{A_2}{s + \frac{1}{T_2}} \quad (\text{A.20})$$

mit  $T_1 = \frac{c}{2U_\infty b_1}$  und  $T_2 = \frac{c}{2U_\infty b_2}$ . Sprungantwort  $W(s)$  und Impulsantwort bzw. Übertragungsfunktion  $H(s)$  sind über

$$W(s) = H(s) \frac{1}{s} \quad (\text{A.21})$$

verbunden. Somit ist die gesuchte Übertragungsfunktion  $H(s)$

$$H(s) = s W(s) = 1 - \frac{A_1 T_1 s}{1 + s T_1} - \frac{A_2 T_2 s}{1 + s T_2}. \quad (\text{A.22})$$

Liegt die Übertragungsfunktion in der Form

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots a_n s^n} \quad (\text{A.23})$$

vor, wobei  $a_n \neq 0$  und mindestens ein  $b_\nu \neq 0$  sei, dann lautet die zugehörige Zustandsraumdarstellung gemäß [56]

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} u \quad (\text{A.24})$$

mit der Ausgangsgleichung

$$y = (b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n}, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n}) \mathbf{x} + \frac{b_n}{a_n} u \quad (\text{A.25})$$

Die auftretende  $n \times n$ -Matrix wird Frobenius-Matrix genannt und das System liegt in der Regelungsnormalform vor.

### Linearer Bereich

Die Wagner-Funktion beschreibt nach [197] die Sprungantwort des Systems auf Änderungen von  $\nu_z$ , die Küssner-Funktion die Sprungantwort des Systems auf Änderungen von  $\nu_x$ . Diese Funktionen werden in Zustandsform transformiert. Beide haben die gleiche Struktur mit unterschiedlichen Zahlenwerten der Koeffizienten. Man erhält für die Wagner-Funktion

$$\dot{\mathbf{x}}_w = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w + \mathbf{b}_w \nu_z \quad (\text{A.26})$$

$$\nu_{z,eff} = \mathbf{c}_w^T \mathbf{x}_w + d_w \nu_z \quad (\text{A.27})$$

mit

$$\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_{1w}b_{2w}(2U_\infty/c)^2 & -(b_{1w} + b_{2w})(2U_\infty/c) \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{b}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{c}_w^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{1w}b_{2w}(2U_\infty/c)^2 & (A_{1w}b_{1w} + A_{2w}b_{2w})(2U_\infty/c) \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$d_w = 1 - A_{1w} - A_{2w}, \quad (\text{A.31})$$

wobei  $A_{1w} = 0.165$ ,  $b_{1w} = 0.0455$ ,  $A_{2w} = 0.335$  und  $b_{2w} = 0.3$  ist.

Für die Küssner-Funktion folgt analog

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k \nu_x \quad (\text{A.32})$$

$$\nu_{x,eff} = \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}_k + d_k \nu_x \quad (\text{A.33})$$

mit

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_{1k}b_{2k}(2U_\infty/c)^2 & -(b_{1k} + b_{2k})(2U_\infty/c) \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{c}_k^T = \begin{pmatrix} b_{1k}b_{2k}(2U_\infty/c)^2 & (A_{1k}b_{1k} + A_{2k}b_{2k})(2U_\infty/c) \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$d_k = 0 \quad (\text{A.37})$$

wobei  $A_{1k} = 0.3$ ,  $A_{2k} = 0.7$ ,  $b_{1k} = 0.14$  und  $b_{2k} = 0.53$  ist. Die Ausgangsgrößen beschreiben die modifizierten „effektiven“ Geschwindigkeitskomponenten der Anströmung, mit denen die aerodynamischen Koeffizienten statt mit  $\nu_z$  und  $\nu_x$  berechnet werden.

### Stall-Bereich

Die semi-empirisch gefundene Funktion für den Stall-Bereich lautet wie oben beschrieben

$$S(\tau) = 1 - A_s e^{-b_s \tau} \quad (\text{A.38})$$

mit  $b_s = 0.26$  und  $A_1 = 1$ . Als Eingangsgröße wird gemäß [197]

$$u_s = \dot{\nu}_z - \dot{\nu}\theta \quad (\text{A.39})$$

verwendet. Die Darstellung in Zustandsform ist

$$\dot{x}_s = A_s x_s + b_s u_s, \quad (\text{A.40})$$

$$y_s = c_s x_s + d_s u_s, \quad (\text{A.41})$$



wobei  $A_s = b_{1s}(2U_\infty/c)$ ,  $b_s = 1$ ,  $c_s = p_s A_{1s} b_{1s} \frac{2V_\infty}{c}$  mit  $p_s = 0.05$  und  $d_s = 0$  ist. Die Ausgangsgröße  $y_s$  entspricht dem Wert  $\Delta p_5$ , welcher Überschießen und Zeitverzögerung beim dynamischen Strömungsabriß beschreibt.

Fasst man die drei Systeme zusammen, ergibt sich ein blockdiagonales Differentialgleichungssystem, welches die instationären Lasten am betrachteten Profilschnitt beschreibt,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_A \mathbf{x} + \mathbf{S}_B \mathbf{u}_a = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_C \mathbf{x} + \mathbf{S}_D \mathbf{u}_a. \quad (\text{A.43})$$

Hierbei bedeuten

$$\mathbf{S}_A = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_a = \begin{pmatrix} \nu_z \\ \nu_z \\ \nu_x \\ \nu_x \\ u_s \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

und

$$\mathbf{S}_C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_w^T & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_k^T & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_D = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_w & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_k & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d_s \end{pmatrix}, \quad \text{sowie } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \nu_z^{eff} \\ \nu_x^{eff} \\ \Delta p_5 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.45})$$

### Vergleich

Zur Überprüfung der Transformation des Dynamic-Stall Modells in Differentialgleichungsform werden die Ergebnisse des DLR-Modells mit den Ergebnissen der Formulierung als Differentialgleichungssystem verglichen. Das System von Differentialgleichungen wird mit der Trapez-Regel diskretisiert, und es wird eine Profilschwingung mit der Amplitude  $\Delta\alpha = 5^\circ$  und der reduzierten Frequenz  $k = 0.1$  bei drei verschiedenen mittleren Anstellwinkeln vorgegeben. Die Ergebnisse sind in den Abb. A.4, A.5 und A.6 für die Bereiche vor, während und nach dem Strömungsabriß dargestellt. Man erkennt deutlich die gute Übereinstimmung der beiden Modelle.

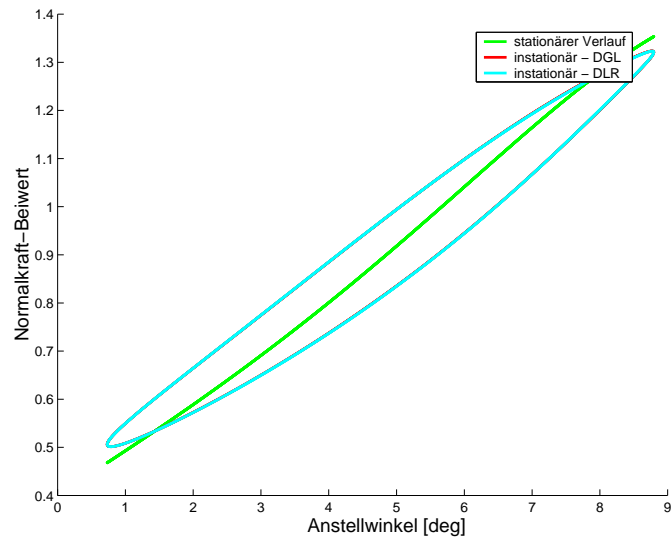


Abbildung A.4 Schwingung im linearen Bereich,  $k = 0.1$ .

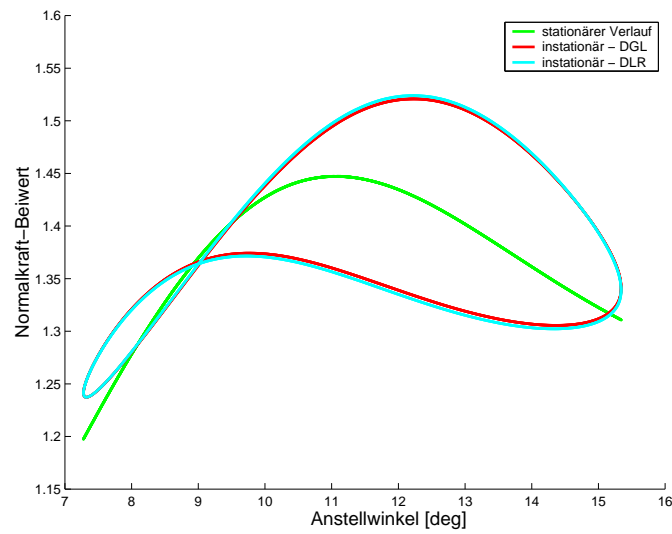


Abbildung A.5 Schwingung im Stall-Bereich,  $k = 0.1$ .

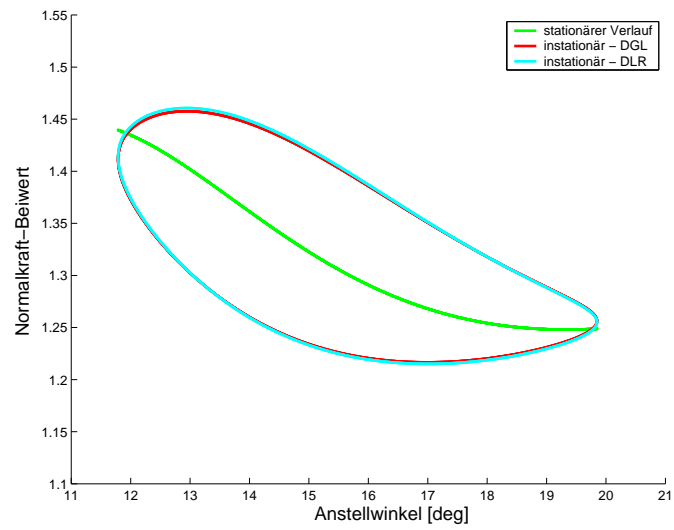


Abbildung A.6 Schwingung im Post-Stall-Bereich,  $k = 0.1$



## B Abschätzung der Lebensdauer

In diesem Kapitel soll das Vorgehen zur Abschätzung der Lebensdauer einer Windkraftanlage kurz beschrieben werden. Genauere Informationen zur Schädigungsrechnung finden sich zum Beispiel in GUDEHUS und ZENNER [76] und den darin zitierten Literaturstellen. Zur Berechnung der Ermüdungsbelastung beginnt man mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Auftreten mittlerer Windgeschwindigkeiten am Standort der Windkraftanlage. Hier kann zum Beispiel die Weibull-Verteilung verwendet werden [131]. Das für die Operation der Windturbine relevante Intervall der mittleren Windgeschwindigkeit wird in gleichgroße Abschnitte unterteilt, in der Praxis wird meist die Breite von 2 m/s verwendet. Das führt zu 12 bis 14 Intervallen, auch Windklassen genannt, denen jeweils eine Auftrittswahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Betrachtet man zusätzlich verschiedene Turbulenzintensitäten, erhöht sich die Zahl dieser Windklassen. Daran anschließend wird für jede Windklasse eine Simulation über mindestens 600 Sekunden Dauer durchgeführt, woraus man Zeitreihen der im betrachteten Bauteil wirkenden Spannungen erhält. Diese Spannungen haben aufgrund der Anregung durch turbulenten Wind einen stochastischen Charakter. Zur Berechnung der Schädigung muß die simulierte Zeitreihe in Einzelschwingspiele, auch Belastungszyklen genannt, zerlegt werden. Das geschieht zum Beispiel durch Anwendung des Rainflow-Algorithmus, siehe Abb. B.1. Hier wird durch die Vorstellung des fließenden Regens, wozu man sich Abb. B.1 um 90° im Uhrzeigersinn gedreht denken muß, die Zeitreihe der Belastung in einzelne Schwingspiele zerlegt. Daraus ergeben sich die in Abb. B.2 für die betrachtete Zeitreihe dargestellten Spannungs-Dehnungs-Hysteresen. Teilt man die Spannungsamplituden in gleich große Abschnitte ein, Klassen genannt, so liegt je Abschnitt eine Einstufenbeanspruchung vor. Das ermöglicht einen Vergleich mit der Wöhlerlinie als Kennfunktion der zulässigen Beanspruchbarkeit für die Lebensdaueranalyse eines Bauteils. Sie gibt an, wie viele Schwingungen einer bestimmten Spannungsamplitude, auch Schwingspiele genannt, das Bauteil aushält, bevor es zerstört wird. In Abb. B.3 ist solch eine Wöhlerlinie dargestellt. Die Wöhlerlinie darf nicht nur das Materialverhalten einer ideal glatten Probe beschreiben, sondern sollte alle relevanten Einflußgrößen des Bauteils wie zum Beispiel Oberflächenrauigkeit und Einfluß der Bauteildicke beinhalten. Meist werden deshalb synthetische Bauteil-Wöhlerlinien verwendet [43].

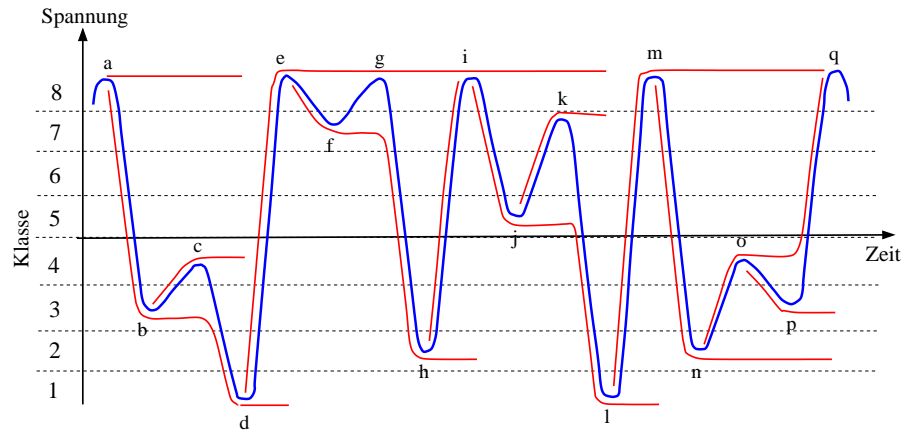


Abbildung B.1 Anwendung des Rainflow-Verfahrens, aus [76].

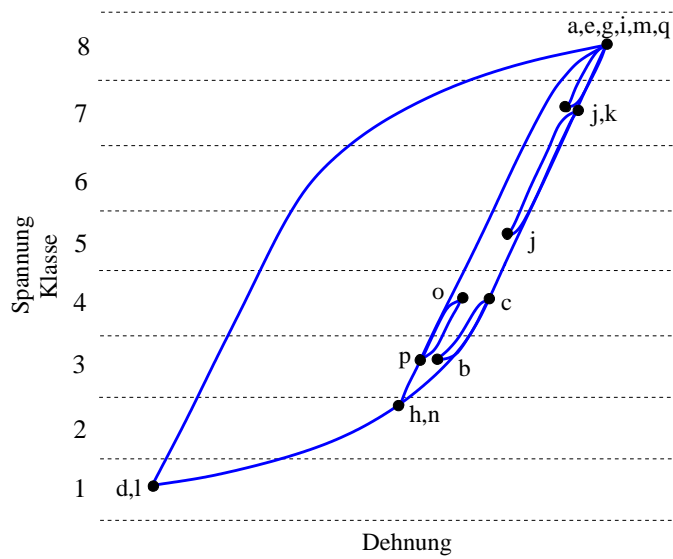


Abbildung B.2 Geschlossene Hysteresen der Zeitfunktion in Abb. B.1, aus [76].

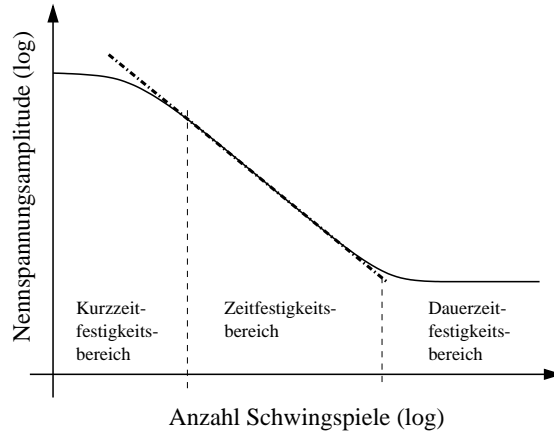


Abbildung B.3 Wöhlerlinie, Kennfunktion der Beanspruchbarkeit.

Eine Lebensdauerabschätzung erfordert jedoch noch zusätzlich eine Hypothese für die mit jedem Schwingspiel zunehmende Werkstoffschädigung. Der einfachste Ansatz hierfür ist die lineare Schadensakkumulationshypothese nach PALMGREN und MINER, siehe [76]. Danach verursacht jedes Schwingspiel im Werkstoff eine Teilschädigung, die unabhängig von der bereits durch die vorlaufenden Schwingspiele verursachte Schädigung ist. Alle Teilschädigungen werden linear zur Gesamtschädigung aufsummiert. Im Zeitfestigkeitsbereich der Wöhlerlinie ergibt sich die Schädigung je Lastspiel diesem Ansatz nach zu

$$\Delta D_i = \frac{1}{N_i}, \quad (\text{B.1})$$

wobei  $N_i$  die dem  $i$ -ten Intervall des Belastungskollektivs zugehörige ertragbare Schwingspielzahl aus der Wöhlerlinie ist. Die Schadenssumme für ein Belastungskollektiv mit  $k$  Abschnitten mit  $n_i$  Schwingspielen pro Abschnitt folgt daraus zu

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i}. \quad (\text{B.2})$$

Versagen wird für  $D = 1$  vorausgesagt. Die Gesamtschädigung ergibt sich durch Überlagerung der Einzelschädigungen der einzelnen Windklassen multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens,  $\sum_{U_m} p(U_m) D_{U_m}$ .





## C Berechnung des Windfeldes

In diesem Abschnitt wird das bodennahe Windfeld, in dem die Windkraftanlage betrieben wird, beschrieben und seine Erzeugung dargestellt. Weitere Informationen finden sich bei MATTHIES et al. [131] oder VEERS [198] und den darin zitierten Literaturstellen. Man kann sich den Wind in der bodennahen Grenzschicht zusammengesetzt denken aus der mittleren Windgeschwindigkeit  $v_m$  und den turbulenten Fluktuationen  $v$  um die mittlere Windgeschwindigkeit. Für den Verlauf der mittleren Windgeschwindigkeit in der Grenzschicht wird oft das logarithmische Gesetz von PRANDTL verwendet [131],

$$v_m(z) = \frac{v_*}{k} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (\text{C.1})$$

Hierbei bezeichnen

$z$	die Höhe über dem Boden in [m],
$v_* = v_m / (2.5 \ln(l_{10}/z_0))$	die Schubspannungsgeschwindigkeit in [m/s],
$z_0$	die Rauigkeitslänge,
$k \approx 0.4$	die VON KÁRMÁN Konstante und $l_{10} = 10$ m.

Gleichung (C.1) besitzt Gültigkeit für eine Höhe von ungefähr 100 Metern, es existieren jedoch empirische Modifikationen der Gleichung, die bis zu Höhen von 300 Metern verwendet werden können [131]. Das logarithmische Gesetz ist nur bei neutraler Stabilität der Atmosphäre gültig. Das bedeutet, daß die thermisch induzierte Turbulenz vernachlässigbar ist gegenüber der mechanisch induzierten Turbulenz und kein vertikaler Austausch von Wärme stattfindet. Da für den Betrieb von Windkraftanlagen vergleichsweise hohe Geschwindigkeiten relevant sind, kann man davon ausgehen, daß die Annahme der neutralen Stabilität hinreichend genau ist.

Die zweite Komponente des Windfeldes besteht aus den turbulenten Fluktuationen. Diese kann man aufteilen in einen longitudinalen Anteil in Windrichtung und zwei laterale Anteile in den Richtungen quer zur Windrichtung. Die turbulenten Fluktuationen  $v$  werden meist durch ihre spektralen Eigenschaften, also durch eine Darstellung im Frequenzbereich mittels der Leistungsspektraldichte beschrieben. Hier kann zum Beispiel das Modell nach VON KÁRMÁN verwendet werden, das als die beste analytische Beschreibung isotroper Turbulenz gilt [131]. Demnach ist die Leistungsspektraldichte  $S_{vv,l}$

der longitudinalen Windfluktuationen als

$$S_{vv,l}(f) = \frac{4 I_t^2 u_m L_i}{\left(1 + 70.78 \left(\frac{f L_i}{v_m}\right)^2\right)^{5/6}} \quad (\text{C.2})$$

und die Leistungsspektraldichte  $S_{vv,q}$  der lateralen Windfluktuationen als

$$S_{vv,q}(f) = 2 I_t^2 v_m L_i \frac{1 + 188.8 \left(\frac{f L_i}{v_m}\right)^2}{\left(1 + 70.78 \left(\frac{f L_i}{v_m}\right)^2\right)^{11/6}} \quad (\text{C.3})$$

definiert. Hierbei bezeichnet  $f$  die Frequenz in Hz und  $L_i$  das integrale Längenmaß der Turbulenz. Die Turbulenzintensität  $I_t$  ist definiert als Quotient aus Standardabweichung der Fluktuationen und mittlerer Windgeschwindigkeit. Die Kohärenzfunktion  $K$ , die die Korrelation der Windfluktuationen an zwei Punkten im Raum mit dem Abstand  $\Delta r$  beschreibt, erhält man aus den VON KÁRMÁN Gleichungen für isotrope Turbulenz durch die Annahme der „frozen turbulence“ nach TAYLOR,

$$K(f, \Delta r) = \exp \left( -a_k \sqrt{\left(\frac{0.2}{L_i} \Delta r\right)^2 + \left(\frac{f}{v_m} \Delta r\right)^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

mit dem Abklingfaktor  $a_k \approx 8.8$ .

Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren zur Berechnung der Zeitserien der turbulenten Fluktuationen wurde erstmals von SHINOZUKA [173] beschrieben. In VEERS [198] findet sich eine beispielhafte Implementierung. Es werden Zeitserien an mehreren Punkten einer senkrecht zur mittleren Windgeschwindigkeit stehenden Ebene erzeugt. Diese Zeitserien werden mit der mittleren Windgeschwindigkeit in Richtung der mittleren Windgeschwindigkeit weiterbewegt, also unter Annahme der „frozen turbulence“. Die Methode füllt somit einen dreidimensionalen Block des Raums mit einem Gitter von Windgeschwindigkeitswerten. Eingangsgrößen der Berechnung sind die Leistungsspektraldichten der Turbulenz an den  $N$  betrachteten Punkten und die Kohärenzfunktion. Die  $N$  Zeitserien werden mittels einer Spektralmatrix  $\mathbf{S}$  berechnet: Die Diagonalelemente von  $\mathbf{S}$  sind die Leistungsspektraldichten und jeder Nicht-Diagonalterm  $s_{ij}$  repräsentiert die Kreuz-Leistungsspektraldichten der Punkte mit den Indices  $i$  und  $j$ . Für die numerische Berechnung wird eine diskrete Repräsentation jedes Elements der Spektralmatrix benötigt. Die kontinuierliche Leistungsspektraldichte  $S_{vv}$  am Punkt  $j$  wird diskretisiert, indem sie in Frequenzbänder der Breite  $\Delta f$  aufgeteilt wird. Jedem Frequenzband wird der Mittelwert  $f_m$  der beiden Randfrequenzen zugewiesen.

Die  $N$  Zeitserien werden generiert durch die Linearkombination von  $N$  unabhängigen Zufallsprozessen. In diesem Fall kann  $\mathbf{S}$  geschrieben werden als ein Produkt aus einer

---

Transformationsmatrix  $\mathbf{H}$  und der Transponierten der konjugiert komplexen Matrix  $\mathbf{H}^*$ ,

$$\mathbf{S}(f_m) = \mathbf{H}(f_m)(\mathbf{H}^*)^T(f_m) \quad (\text{C.5})$$

wobei jeder Eintrag von  $\mathbf{S}$  eine Funktion der Frequenz  $f_m$  ist. Da  $\mathbf{S}$  reell ist, muß  $\mathbf{H}$  ebenfalls reell sein und  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$  gelten. Um die Matrix  $\mathbf{H}$  in effizienter Weise zu berechnen, nimmt man an, daß  $\mathbf{H}$  eine untere Dreiecksmatrix ist [173]. Dann sind die Nicht-Null-Elemente eindeutig definiert durch das folgende rekursive Gleichungssystem [198]:

$$\begin{aligned} h_{11} &= s_{11}^{\frac{1}{2}}, \\ h_{21} &= s_{21}/h_{11}, \\ h_{22} &= (s_{22} - h_{21}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ h_{31} &= s_{31}/h_{11} \\ &\vdots \\ h_{jk} &= \left( s_{jk} - \sum_{l=1}^{k-1} h_{jl}h_{kl} \right) / h_{kk} \\ h_{kk} &= \left( s_{kk} - \sum_{l=1}^{k-1} h_{kl}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Die Elemente der Matrix  $\mathbf{H}$  können als Wichtungsfaktoren der Linearkombinationen von  $N$  unabhängigen Zufallsprozessen betrachtet werden, woraus  $N$  korrelierte Ausgabegrößen mit der korrekten Kreuz-Spektraldichte folgen. Jede Zeile von  $\mathbf{H}$  beschreibt die Anteile aller Eingabegrößen zu der Ausgabe am Punkt  $k$ , jede Spalte von  $\mathbf{H}$  gibt die Anteile des Eingangs  $j$  an allen Ausgangsgrößen an. Die unabhängigen Prozesse des weißen Rauschens sind enthalten in einer  $N \times N$  Diagonalmatrix  $\mathbf{X}$ , so daß

$$x_{jk}(f_m) = \begin{cases} e^{i\theta_{km}} & j = k \\ 0 & j \neq k, \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

worin  $i = \sqrt{-1}$  ist und  $\theta_{km}$  den Phasenwinkel beschreibt, der mit der  $k$ -ten Eingangsgröße und der  $m$ -ten Frequenz assoziiert ist.  $\theta_{km}$  ist gleichmäßig im Intervall  $[0, 2\pi]$  zufallsverteilt. Die Matrixgleichung für den  $N \times 1$  Vektor der komplexen Fourier-Koeffizienten der simulierten Windgeschwindigkeit wird gegeben durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{1}, \quad (\text{C.8})$$

worin  $\mathbf{1}$  ein  $N \times 1$  Vektor von Einsen ist. Die Zeitserien erhält man durch die Anwendung der inversen Fouriertransformation auf jedes Element von  $\mathbf{v}$ , resultierend in einer simulierten Windgeschwindigkeit an jedem Zeitpunkt an allen  $N$  Punkten.



# Literaturverzeichnis

- [1] AINSWORTH, M. und J.T. ODEN: *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, Inc., 2000.
- [2] ALMROTH, B.O., P. STERN und F.A. BROGAN: *Automatic choice of global shape functions in structural analysis*. AIAA Journal, 16(5):525–528, 1978.
- [3] ARGYRIS, J. und H.-P. MLEJNEK: *Die Methode der Finiten Elemente Band III*. Vieweg Verlag, 1988.
- [4] ARMERO, F. und I. ROMERO: *On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics*. Report UCB/SEMM-1999/06, 1999.
- [5] BANGERT, W. und R. RANNACHER: *Finite element approximation of the acoustic wave equation: Error control and mesh adaptation*. East-West Journal of Numerical Mathematics, 7(4):263–282, 1999.
- [6] BATHE, K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [7] BAUCHAU, O.A., C.L. BOTASSO und Y.G. NIKISHKOV: *Modeling rotorcraft dynamics with finite element multibody procedures*. Mathematical and Computer Modeling, 2001. eingereicht.
- [8] BAUCHAU, O.A., J-Y. CHOI und C.L. BOTASSO: *Energy decaying scheme for nonlinear dynamics of shells*. In: *Proceedings ECCM 2001, Krakau, Polen*. ECCM, 2001.
- [9] BAUCHAU, O.A., G. DAMILANO und N.J. THERON: *Numerical integration of nonlinear elastic multi-body systems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:2727–2751, 1995.
- [10] BAUCHAU, O.A. und T. JOO: *Computational schemes for non-linear elastodynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45:693–719, 1999.

- [11] BAYSAL, O. und M.E. ELESYAKY: *Aerodynamic sensitivity analysis methods for the compressible Euler equations*. Journal of Fluids Engineering, 113:681–688, 1991.
- [12] BÜCHTER, N. und E. RAMM: *Large rotations in structural mechanics*. In: RAMMERSTORFER, F.G. (Herausgeber): *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements*, Seiten 1–14. Springer Verlag, 1992.
- [13] BECKER, R. und R. RANNACHER: *A feed-back approach to error control in finite element methods: Basic analysis and examples*. East-West Journal for Numerical Mathematics, 4:237–264, 1996.
- [14] BECKER, R. und R. RANNACHER: *Weighted a posteriori error control in finite element methods*. Technical Report 96-1, Universität Heidelberg, 1996.
- [15] BECKER, R. und ROLF RANNACHER: *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite elements*. Acta Numerica, Seiten 1–102, 2001.
- [16] BEDDOES, T.S.: *A synthesis of unsteady aerodynamic effects including stall hysteresis*. Vertica, 1:113–123, 1976.
- [17] BELYTSCHKO, T., W.K. LIU und B. MORAN: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [18] BERKOOZ, G., P. HOLMES und J.L. LUMLEY: *The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows*. Annual Reviews of Fluid Mechanics, 25:539–575, 1993.
- [19] BESDO, D.: *Beitrag zu einer nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums*. Habilitationsschrift, TU Braunschweig, 1973.
- [20] BETSCH, P. und P. STEINMANN: *Conservation properties of a time FE method - part II: Time-stepping schemes for non-linear elastodynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50:1931–1955, 2001.
- [21] BIRNBAUM, W.: *Das ebene Problem des schlagenden Flügels*. ZAMM, 4, 1924.
- [22] BOSSANYI, E.A.: *Bladed for Windows Theory Manual*. Garrad Hassan and Partners Limited, 1999.
- [23] BROWN, K.D. und S.P. FIDDES: *New developments in rotor wake methodology*. In: *Proceedings of the 22nd European Rotorcraft Forum*, 1996.
- [24] BROWN, R.E.: *Rotor wake modeling for flight dynamic simulation of helicopters*. AIAA Journal, 38/1:57–63, 2000.

- [25] BUCHER, C.: *Stabilization of explicit time integration by modal reduction*. In: *Trends in Computational Structural Mechanics*. CIMNE Barcelona, 2001.
- [26] CABOS, C.: *Error bounds for dynamic responses in forced vibration problems*. SIAM Journal of Scientific Computing, 15(1):1–15, 1994.
- [27] CARDONA, A. und M. GÉRADIN: *A beam finite element non-linear theory with finite rotations*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 26:2403–2438, 1988.
- [28] CARDONA, A. und M. GÉRADIN: *Time integration of the equations of motion in mechanism analysis*. Computers and Structures, 33/3:801–820, 1989.
- [29] CARDONA, A. und M. GÉRADIN: *Numerical integration of second order differential-algebraic systems in flexible mechanism dynamics*. In: PEREIRA, M.F.O. und J.A.C. AMBROSIO (Herausgeber): *Computer-aided Analysis of Rigid and Flexible Systems NATO ASI Series E Vol. 268*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [30] CARR, J.: *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer Verlag, 1981.
- [31] CAZEMIER, W.: *Proper Orthogonal Decomposition and Low Dimensional Models for Turbulent Flows*. Dissertation, Universität Groningen, 1997.
- [32] CHAN, A.S. und K.M. HSIAO: *Nonlinear analysis using a reduced number of variables*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 52:899–913, 1985.
- [33] CHANG, C. und J.J. ENGBLOM: *Nonlinear dynamical response of impulsively loaded structures: A reduced basis approach*. AIAA Journal, 29(4):613–618, 1991.
- [34] CHUNG, J. und G.M. HULBERT: *A time integration algorithm for structural dynamics with Improved numerical dissipation: The generalized- $\alpha$  method*. Journal of Applied Mechanics, 60:371–375, 1993.
- [35] CONNELL, J.R.: *The spectrum of wind speed fluctuations encountered by a rotating blade of a wind energy conversion system*. Solar Energy, 29/3:363–375, 1982.
- [36] CONNELL, J.R. und D.C. POWELL: *Comparison of measured and modeled turbulence spectra for a point rotating as on a horizontal-axis wind turbine*. Journal of Solar Energy Engineering, 111:268–277, 1989.
- [37] CONSTANTIN, P., C. FOIAS, B. NICOLAENKO und R. TEMAM: *Integral manifolds and inertial manifolds for dissipative partial differential equations*. Springer Verlag, 1989.

- [38] CRESPO, A., J. HERNÁNDEZ und S. FRANDSEN: *Survey of modelling methods for wind turbine wakes and wind farms*. Wind Engineering, 2:1–24, 1999.
- [39] CRISFIELD, M.A.: *A consistent co-rotational formulation for nonlinear three-dimensional beam-elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 81:131–150, 1990.
- [40] CRISFIELD, M.A., U. GALVANETTO und G. JELENÍČ: *Dynamics of 3-D co-rotational beams*. Computational Mechanics, 20:507–519, 1997.
- [41] CRISFIELD, M.A. und G. JELENÍČ: *Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation*. Proceedings of the Royal Society London A, 455:1125–1147, 1999.
- [42] CRISFIELD, M.A. und J. SHI: *A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:1897–1913, 1994.
- [43] DALHOFF, P., A. DOMBROWSKI, E. GAUTERIN, H. IDELBERGER und S.P. SUBRAMANIAN: *Erweiterte Lebensdaueranalyse für Windenergieanlagen*. In: *Tagungsband der Windtech Grevebroich*, 2001.
- [44] DEBUSSCHE, A. und M. MARION: *On the construction of families of approximate inertial manifolds*. Journal of Differential Equations, 100:173–201, 1992.
- [45] DEVULDER, C. und M. MARION: *A class of numerical algorithms for large time integration: The nonlinear Galerkin methods*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 29/2:462–483, 1992.
- [46] DINKLER, D.: *Reduction methods in structural dynamics*. In: MESKOURIS, K. und U. WITTEK (Herausgeber): *Aspects in Modern Computational Structural Analysis*, Seiten 19–31. Balkema, 1997.
- [47] DOWELL, E.H.: *Eigenmode analysis in unsteady aerodynamics: Reduced order models*. AIAA Journal, 34/8:1578–1583, 1996.
- [48] EKATERINARIS, J.A. und M.F. PLATZER: *Computational prediction of airfoil dynamic stall*. Prog. Aerospace Sci., 33:759–846, 1997.
- [49] ELLIOTT, A.S.: *ADAMS/WT User's Guide*. Mechanical Dynamics, Inc., 1996.
- [50] ERIKSSON, K., D. ESTEP, P. HANSBO und C. JOHNSON: *Introduction to adaptive methods for differential equations*. Acta Numerica, Seiten 105–158, 1995.
- [51] ERIKSSON, K., D. ESTEP, P. HANSBO und C. JOHNSON: *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.



- [52] ESTEP, D.: *A posteriori error bounds and global error control for approximations of ordinary differential equations*. SIAM Journal for Numerical Analysis, 32:1–48, 1995.
- [53] FERZIGER, J.H. und M. PERIĆ: *Computational Methods for Fluid Dynamics, 2nd Edition*. Springer Verlag, 1999.
- [54] FINK, J.P. und W.C. RHEINBOLDT: *On the discretization error of parametrized nonlinear equations*. Siam Journal of Numerical Analysis, 20/4:732–746, 1983.
- [55] FINK, J.P. und W.C. RHEINBOLDT: *On the error behaviour of the reduced basis technique for nonlinear finite element approximations*. ZAMM, 63:21–28, 1983.
- [56] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 1990.
- [57] FLOREA, R., K.C. HALL und P.G. CIZMAS: *Reduced-order modeling of unsteady viscous flow in a compressor cascade*. AIAA Journal, 36/6:1039–1048, 1998.
- [58] FOIAS, C., M.S. JOLLY, I.G. KEVREKIDIS, G.R. SELL und E.S. TITI: *On the computation of inertial manifolds*. Physics Letters A, 131(7,8):433–436, 1988.
- [59] FOIAS, C., O. MANLEY und R. TEMAM: *Modelling of the interaction of small and large eddies in two-dimensional turbulent flows*. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 22(1):93–114, 1988.
- [60] FOIAS, C., G.R. SELL und R. TEMAM: *Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations*. Journal of Differential Equations, 73:309–353, 1988.
- [61] FORSELL, K.: *Instability analyses of structures under dynamic loads*. Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2000.
- [62] FÖRSCHING, H.W.: *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer, 1974.
- [63] GAONKAR, G.H. und D.A. PETERS: *Review of dynamic inflow modeling for rotorcraft flight dynamics*. Vertica, 12/3:213–242, 1988.
- [64] GARCHIA-ARCHILLA, B., J. NOVO und E.S. TITI: *Postprocessing the Galerkin Method: A novel approach to approximate inertial manifolds*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 35/3:941–972, 1998.
- [65] GASCH, R.: *Windkraftanlagen: Grundlagen und Entwurf*. Teubner, 1996.
- [66] GASCH, R. und K. KNOTHE: *Kontinua und ihre Diskretisierung*. Springer Verlag, 1989.
- [67] GÉRADIN, M und A. CARDONA: *Flexible Multibody Dynamics, A Finite Element Approach*. Wiley, 2001.

- [68] GÉRADIN, M., A. CARDONA, D.B. DOAN und J. DUYSSENS: *Finite element modeling concepts in multibody dynamics*. In: PEREIRA, M.S. und J.A.C. AMBROSIO (Herausgeber): *Computer-aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, Seiten 233–284. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [69] GILES, M.B.: *On adjoint equations for error analysis and optimal grid adaptation in CFD*. Technical Report 97/11, Oxford University, 1997.
- [70] GLAUERT, H.: *Airplane Propellers*. In: DURAND, W.F. (Herausgeber): *Aerodynamic Theory, Vol. 4*, Seiten 169–360. Dover Publications, 1935.
- [71] GOLUB, G.H. und C.F. VAN LOAN: *Matrix Computations, 3rd Ed.* Johns Hopkins University Press, 1996.
- [72] GOMAN, M. und A. KHRABROV: *State-space representation of aerodynamic characteristics of an aircraft at high angles of attack*. Journal of Aircraft, 31(5):1109–1115, 1994.
- [73] GRAHAM, W.R., J. PERAIRE und K.Y. TANG: *Optimal control of vortex shedding using low-order models. Part I: Open-loop Model Development*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44/7:945–972, 1999.
- [74] GRUTTMANN, F., S. SAUER und W. WAGNER: *Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48/12:1675–1702, 2000.
- [75] GUCKENHEIMER, J. und P. HOLMES: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. Springer Verlag, 1983.
- [76] GUDEHUS, H. und H. ZENNER: *Leitfaden für eine Betriebsfestigkeitsrechnung*. Verlag Stahleisen, 1995.
- [77] HAKEN, H.: *Advanced Synergetics*. Springer Verlag, 1983.
- [78] HANSEN, M.O.L.: *Aerodynamics of Wind Turbines*. James & James Science Publishers, 2000.
- [79] HANSEN, O.E. und K. BELL: *On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics*. Journal of Earthquake Engineering, 7:405–411, 1979.
- [80] HARMAN, H.: *Modern Factor Analysis*. University of Chicago Press, 1960.
- [81] HAU, E.: *Windkraftanlagen: Grundlagen, Technik, Einsatz, Wirtschaftlichkeit*. Springer Verlag, 2. Auflage, 1996.

- [82] HÄHNLE, U., D. DINKLER und B. KRÖPLIN: *Interaction of Local and Global Non-linearities of Elastic Rotating Structures*. AIAA Journal, 33, 1995.
- [83] HILBER, H.M., T.J.R. HUGHES und R.L. TAYLOR: *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5:283–292, 1977.
- [84] HILLE, N.: *Comparison of a Variable Speed to a Constant Speed Pitch Regulated Horizontal Axis Wind Turbine using FLEX4*. Studienarbeit, Danish Technical University, 1999.
- [85] HOLMES, P., J.L. LUMLEY und G. BERKOOZ: *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, 1996.
- [86] HOTELLING, H.: *Analysis of complex statistical variables in principal components*. Journal of experimental psychology, 24:417, 1953.
- [87] HSIAO, K.M, J.Y. LIN und W.Y. LIN: *A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of 3-D beams*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 169:1–18, 1999.
- [88] HUGHES, T.J.R.: *Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behaviour*. In: *Computational Methods for Transient Analysis*. North-Holland, 1983.
- [89] HUMAR, J.L.: *Dynamics of Structures*. Prentice Hall, 1990.
- [90] HURTY, W.C.: *Dynamic analysis of structural systems using component modes*. AIAA Journal, 3:678–685, 1965.
- [91] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. und M. AL MIKAD: *Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41:781–814, 1998.
- [92] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. und S. MAMOURI: *On rigid components and joint constraints in nonlinear dynamics of flexible multibody systems employing 3D geometrically exact beam model*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188:805–831, 2000.
- [93] IDELSON, S.R. und A. CARDONA: *A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:253–279, 1985.
- [94] JAMESON, A.: *Aerodynamic design via control theory*. Journal of Scientific Computing, 3:233–260, 1988.

- [95] JELENIĆ, G. und M.A. CRISFIELD: *Nonlinear master-slave relationship for joints in 3D beams with large rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 135:211–228, 1997.
- [96] JELENIĆ, G. und M.A. CRISFIELD: *Interpolation of rotational variables in nonlinear dynamics of 3D beams*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43:1193–1222, 1998.
- [97] JOHNSON, C.: *Error estimates and adaptive time-step control for a class of one-step methods for stiff ordinary differential equations*. SIAM Journal for Numerical Analysis, 25,4:908–926, 1988.
- [98] JOHNSON, C.: *Adaptive computational methods for differential equations*. In: BALL, J.M. und J.C.R. HUNT (Herausgeber): *ICIAM, Edinburgh*, 1999.
- [99] JONES, R.T.: *The unsteady lift of a wing of finite aspect ratio*. Technischer Bericht, NACA Report 681, 1940.
- [100] JOO, K.J., E.L. WILSON und P. LEGER: *Ritz vectors and generation criteria for mode superposition analysis*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 18:149–167, 1989.
- [101] KANE, C., J.E. MARSDEN, M. ORTIZ und M. WEST: *Variational integrators and the newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 49:1295–1325, 2000.
- [102] KANE, T.R., P.W. LIKINS und D.A. LEVINSON: *Spacecraft dynamics*. Wiley, 1983.
- [103] KARHUNEN, K.: *Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse*. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, 37, 1946.
- [104] KELLEY, C.T.: *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. SIAM, 1995.
- [105] KÜHN, M.: *Dynamics and Design Optimisation of Offshore Wind Energy Conversion Systems*. DUWIND Delft University, 2001.
- [106] KLEIBER, M.: *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. John Wiley and Sons, 1997.
- [107] KLINE, K.A.: *Dynamic analysis using a reduced basis of exact modes and Ritz vectors*. AIAA Journal, 24(12):2022–2029, 1986.
- [108] KREUZER, E. und O. KUST: *Analysis of long torsional springs by proper orthogonal decomposition*. Archive of Applied Mechanics, 67:68–80, 1996.

- [109] KRYSL, P., S. LALL und J.E. MARSDEN: *Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51:479–504, 2001.
- [110] KÜSSNER, H.G.: *Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln*. Luftfahrtforschung, 8, 1936.
- [111] KÜSSNER, H.G.: *Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung der Partialbewegung der Flüssigkeit*. Luftfahrtforschung, 17(11/12), 1940.
- [112] KUHL, D. und M.A. CRISFIELD: *Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45:569–599, 1999.
- [113] KUHL, D. und E. RAMM: *Constraint energy momentum algorithm and its application to nonlinear dynamics of shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 136:293–315, 1996.
- [114] LAING, C.R., A. MCROBIE und J.M.T. THOMPSON: *The post-processed Galerkin method applied to non-linear shell vibrations*. Dynamics and Stability of Systems, 14/2:163–181, 1999.
- [115] LAMINIE, J., F. PASCAL und R. TEMAM: *Implementation and numerical analysis of the nonlinear Galerkin methods with finite element discretization*. Applied Numerical Mathematics, 15:219–246, 1994.
- [116] LANCZOS, C.: *The variational principles of mechanics, 4. Ed.* Dover Publications, Inc., 1970.
- [117] LEE, D.J. und S.U. NA: *High resolution free vortex blob method for highly distorted vortex wake generation from a slowly starting rotor blade in hover*. In: *Proceedings of the 21st European Rotorcraft Forum*, 1995.
- [118] LEGER, P. und S. DUSSAULT: *Non-linear seismic response analysis using vector superposition methods*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 21:163–176, 1992.
- [119] LEISHMAN, J.G. und T.S. BEDDOES: *A generalised model for airfoil unsteady aerodynamic behaviour and dynamic stall using the indicial method*. In: *42nd Annual Forum of the AHS*, Seiten 243–265, 1986.
- [120] LEISHMAN, J.G. und T.S. BEDDOES: *A semi-empirical model for dynamic stall*. Journal of the American Helicopter Society, 7:3–17, 1989.

- [121] LEISHMAN, J.G. und K.Q. NGUYEN: *State-space representation of unsteady airfoil behaviour*. AIAA Journal, 28(5):836–844, 1990.
- [122] LEISS, U. und S. WAGNER: *Toward a unified representation of rotor blade airloads with emphasis on unsteady and viscous effects*. In: *Thirteenth European Rotorcraft Forum*, 1987.
- [123] LINDENBURG, C. und J.G. SCHEPERS: *Phatas III Aeroelastic Modelling*. ECN Report C-96-025, 1996.
- [124] LOÈVE, M.M.: *Probability Theory*. Van Nostrand, New Jersey, 1955.
- [125] LOGG, A.: *Multi-adaptive error control for ODEs*. Preprint 2000-003, Chalmers Finite Element Center, 2000.
- [126] LOGG, A.: *A multiadaptive ODE-solver*. Preprint 2000-002, Chalmers Finite Element Center, 2000.
- [127] LORENZ, E.N.: *Empirical orthogonal eigenfunctions and statistical weather prediction*. MIT Report, Department of Meteorology, 1956.
- [128] LUMLEY, J.L.: *The structure of inhomogeneous turbulent flows*. In: YAGLOM, A.M. und V.I. TATARSKI (Herausgeber): *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, 1967.
- [129] MARCHUK, G.I.: *Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [130] MARION, M. und R. TEMAM: *Nonlinear Galerkin methods*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 26(5):1139–1157, 1989.
- [131] MATTHIES, H.G., C. NATH, T.E. SCHELLIN, A.D. GARRAD, M.A. WASTLING, D.C. QUARTON, J. WEI, M. SCHERWEIT und T. SIEBERS: *Study of Offshore Wind Energy in the EC, JOULE I*. Verlag natürliche Energie, 1995.
- [132] MCCROSKEY, W.J.: *The phenomenon of dynamic stall*. NASA TM-81264, 1991.
- [133] MIKKELSEN, R., J.N. SØRENSEN und W.Z. SHEN: *Yaw analysis using a 3D actuator line model*. In: *Proceedings of the EWEC, Copenhagen*, 2001.
- [134] MORAND, H.J.-P. und R. OHAYON: *Fluid Structure Interaction*. Wiley, 1995.
- [135] NEEF, M. und D. HUMMEL: *Euler solutions for a finite-span flapping wing*. In: MUELLER, T. J. (Herausgeber): *Proceedings of the conference: Fixed, flapping and rotary wing vehicles at very low Reynolds numbers*, Seiten 75–99, Notre Dame, 5-7 June 2000.

- [136] NEWMARK, N.M.: *A method of computation for structural dynamics*. J. Engng. Mech. Div. Proc. ASCE, 85:67–94, 1959.
- [137] NICKELL, R.E.: *Nonlinear dynamics by mode superposition*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 7:107–129, 1976.
- [138] NOOR, A.K.: *Recent advances and applications of reduction methods*. Appl. Mech. Rev., 47/5:125–145, 1994.
- [139] NOOR, A.K. und J.M. PETERS: *Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures*. AIAA Journal, 18(4):455–462, 1980.
- [140] NOUR-OMID, B. und R.W. CLOUGH: *Dynamic analysis of structures using Lanczos co-ordinates*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 12:565–577, 1984.
- [141] NOUR-OMID, B. und C.C. RANKIN: *Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 93:353–384, 1991.
- [142] ØYE, S.: *Dynamic stall simulated as time lag of separation*. In: *Proceedings of the EWEC*, 1994.
- [143] PEDERSEN, M.: *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering*. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [144] PETERS, D.A. ET AL. : *Finite state induced flow models. Part II: Three-dimensional rotor disk*. Journal of Aircraft, 32(2):323–333, 1995.
- [145] PETERSEN, J.T.: *Kinematically Nonlinear Finite Element Model of a Horizontal Axis Wind Turbine*. Risø National Laboratory, 1990.
- [146] PETOT, D.: *Differential equation modeling of dynamic stall*. Rech. Aerosp., 5:59–72, 1989.
- [147] PETOT, D. ET AL. : *Stall effects and blade torsion - an evaluation of predictive tools*. Journal of the American Helicopter Society, 10:320–331, 1999.
- [148] PETROV, E. und M. GÉRADIN: *Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 165:43–92, 1998.
- [149] PETROV, E. und M. GÉRADIN: *Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part 2: Anisotropic and advanced beam models*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 165:93–127, 1998.

- [150] PHILLIPS, J.R.: *Projection-based model reduction using implicit nonlinearity representation*. In: BATHE, K.J. (Herausgeber): *Computational Fluid and Solid Mechanics, Vol. 2*. Elsevier, 2001.
- [151] PIERCE, N.A. und M.B. GILES: *Adjoint recovery of superconvergent functionals from PDE approximations*. SIAM Review, 42/2:247–264, 2000.
- [152] PIZIALI, R.A.: *2-D and 3-D oscillating wing aerodynamics for a range of angles of attack including stall*. Technischer Bericht, NACA Technical Memorandum 4632, 1994.
- [153] POIREL, D.C. und S.J. PRICE: *Post-instability behaviour of a structurally nonlinear airfoil in longitudinal turbulence*. Journal of Aircraft, 34(5):619–626, 1997.
- [154] QUADRELLI, B.M. und S.N. ATLURI: *Analysis of flexible multibody systems with spatial beams using mixed variational principles*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42:1071–1090, 1998.
- [155] RANKIN, C.C. und F.A. BROGAN: *An element independent co-rotational procedure for the treatment of large rotations*. Journal of Pressure Vessel Technology, 108:165–174, 1986.
- [156] RANNACHER, R.: *The dual-weighted-residual method for error control and mesh adaptation in finite element methods*. In: WHITEMAN, J.R. (Herausgeber): *MA-FELEAP 99*, Seiten 97–115. Elsevier, 2000.
- [157] RANNACHER, R. und C. JOHNSON: *On error control in computational fluid mechanics*. Technical Report 94-13, Universität Heidelberg, 1994.
- [158] RASMUSSEN, F., J.T. PETERSEN und H.A. MADSEN: *Dynamic stall and aerodynamic damping*. Journal of Solar Energy Engineering, 121:150–155, 1999.
- [159] REISSNER, E.: *On one-dimensional finite strain beam theory: The plane problem*. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 23:795–804, 1972.
- [160] REMKE, J. und H. ROTHERT: *Eine modale Reduktionsmethode zur geometrisch nichtlinearen statischen und dynamischen Finite-Element-Berechnung*. Archive of Applied Mechanics, 63:101–115, 1993.
- [161] REMPFER, D.: *On low-dimensional Galerkin models for fluid flow*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 14:75–88, 2000.
- [162] RHEINBOLDT, W.C.: *Methods for solving systems of nonlinear equations*. SIAM, 1974.



- [163] RUSSELL, R.D., D.M. SLOAN und M.R. TRUMMER: *Some numerical aspects of computing inertial manifolds*. SIAM Journal of Scientific Computing, 14/1:19–43, 1993.
- [164] SAAD, Y.: *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Manchester University Press, 1992.
- [165] SANCOUR, C., P. WRIGGERS und J. SANCOUR: *Nonlinear dynamics of shells, theory, finite element formulation and integration schemes*. Nonlinear Dynamics, 13:279, 1996.
- [166] SANSOUR, C., P. WRIGGERS und J. SANSOUR: *Time integration and reduction methods in nonlinear dynamics of solids*. In: *GAMM 2001, Zürich*, 2001.
- [167] SANSOUR, J.: *Nichtlineare Dynamik geometrisch exakter Schalen und Stäbe: Theorie, Numerik finiter Elemente und Integrationsalgorithmen*. Dissertation, TU Darmstadt, 1996.
- [168] SCHEPERS, J.G., B. MONTGOMERIE und H. SNEL: *Investigation and modelling of dynamic inflow effects: Yaw modelling and validation*. In: *Proceedings of the EWEC*, 1994.
- [169] SCHNELL, W., D. GROSS und W. HAUGER: *Technische Mechanik Band 2, Elastostatik*. Springer, 1990.
- [170] SCHNELL, W., D. GROSS und W. HAUGER: *Technische Mechanik Band 1, Statik*. Springer, 1998.
- [171] SELL, G.R. und Y. YOU: *Inertial manifolds: The non-self-adjoint case*. Journal of Differential Equations, 96:203–255, 1992.
- [172] SHAWLER, J.R., D.J. SHARPE und D.G. INFELD: *ADAMS/WT modelling of the Wind Energy Groups MS4 prototype*. In: *Proceedings of the EWEC*, 2001.
- [173] SHINOZUKA, M.: *Simulation of multivariate and multi-dimensional random processes*. Journal of the Acoustical Society of America, 49:357–367, 1971.
- [174] SIMO, J.C.: *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:55–70, 1985.
- [175] SIMO, J.C. und N. TARNOW: *The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 43:757–792, 1992.

- [176] SIMO, J.C., N. TARNOW und K.K. WONG: *Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear elastodynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 100:63–116, 1992.
- [177] SIMO, J.C. und L. VU-QUOC: *A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58:79–115, 1986.
- [178] SIMO, J.C. und L. VU-QUOC: *On the dynamics in space of rods undergoing large motions: A geometrically exact approach*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 66:125–161, 1988.
- [179] SIMO, J.C. und K.K. WONG: *Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31:19–52, 1991.
- [180] SIROVITCH, L.: *Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I-II*. Quarterly of Applied Mathematics, 45:561–590, 1987.
- [181] SIROVITCH, L und R. EVERSON: *Management and analysis of large scientific datasets*. International Journal of Supercomputer Applications, 6(1):50–68, 1992.
- [182] SÜLI, E. und P. HOUSTON: *Finite element methods for hyperbolic problems: A posteriori error analysis and adaptivity*. In: DUFF, I.S. und G.A. WATSON (Herausgeber): *State of the Art in Numerical Analysis*. Oxford University Press, 1996.
- [183] SNEL, H.: *Heuristic modeling of dynamic stall characteristics*. In: *Proceedings of the EWEC*, Seiten 429–433, 1997.
- [184] SNEL, H.: *Review of the present status of rotor aerodynamics*. Wind Engineering, 1:46–69, 1998.
- [185] SNEL, H. und J.G. SCHEPERS: *Engineering models for dynamic inflow phenomena*. In: *Proceedings of the EWEC*, 1991.
- [186] SNEL, H. und J.G. SCHEPERS: *Investigation and modelling of dynamic flow effects*. In: *Proceedings of the EWEC*, 1993.
- [187] SØRENSEN, J.N.: *VISCWIND Viscous Effects on Wind Turbine Blades*. Technical University of Denmark, 1999.
- [188] SØRENSEN, J.N. und R. MIKKELSEN: *On the validity of the blade element momentum method*. In: *Proceedings of the EWEC, Copenhagen*, 2001.
- [189] SØRENSEN, J.N. und W.Z. SHEN: *Numerical modelling of wind turbine wakes*. Preprint, submitted to: Journal of Fluids Engineering, 2001.

- [190] SPERA, D.A.: *Wind Turbine Technology*. ASME Press, 1994.
- [191] TEMAM, R.: *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer Verlag, 1997.
- [192] THEODORSEN, T.: *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. Technischer Bericht, NACA Report Nr. 496, 1934.
- [193] TITI, E.S.: *On approximate inertial manifolds to the Navier-Stokes equations*. Journal of mathematical analysis and applications, 149:540–557, 1990.
- [194] TROGER, H. und A. STEINDL: *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*. Springer Verlag Wien New York, 1991.
- [195] TRUONG, V.K.: *Prediction of helicopter rotor airloads based on physical modeling of 3-D unsteady aerodynamics*. Technischer Bericht, ONERA TP 1996-29, 1996.
- [196] UTKU, S., L.M. CLEMENTE und S. MOKTAR: *Errors in reduction methods*. Computers and Structures, 21/6:1153–1157, 1985.
- [197] VAN DER WALL, B.: *Analytische Formulierung der instationären Profilbeiwerte und deren Anwendung in der Rotorsimulation*. DLR-FB 90-28, Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt, 1990.
- [198] VEERS, P. S.: *Three-Dimensional Wind Simulation*. SANDIA Report SAND88-0152, 1988.
- [199] VERFÜHRT, R.: *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Wiley und Teubner, 1996.
- [200] WAGNER, H.: *Über die Entstehung des dynamischen Auftriebs von Tragflügeln*. ZAMM, 5, 1925.
- [201] WALHORN, E.: *Berechnung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [202] WIGGINS, S.: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer Verlag, 1990.
- [203] WILSON, E.L., M. YUAN und J.M. DICKENS: *Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10:813–821, 1982.
- [204] WINKELAAR, D.: *SWIFT: Simulation of Wind Fields in Time*. [http://www.ecn.nl/unit\\_de/wind/project/swift.html](http://www.ecn.nl/unit_de/wind/project/swift.html), 1999.

- [205] WOOD, W.L.: *Practical Time-stepping Schemes*. Clarendon Press, 1990.
- [206] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag, 2001.
- [207] ZERLE, L. und S. WAGNER: *Development and validation of a vortex-lattice method to calculate the flow field of a helicopter rotor including free wake development*. In: *Proc. 18th European Rotorcraft Forum. Avignon, France, September 1992*.